А. Н. БАРСУКОВ

АЛГЕБРА

ЧАСТЬ

I

УЧЕБНИК
ДЛЯ 6-7 КЛАССОВ
СЕМИЛЕТНЕЙ
И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

МОСКВА • 1959

А. Н. БАРСУКОВ

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК
ДЛЯ 6 и 7 КЛАССОВ
СЕМИЛЕТНЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Утверждён
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ 4-е

Москва 1959

Александр Николаевич Барсуков
АЛГЕБРА ДЛЯ 6—7 КЛАССОВ

Редактор *Н. И. Лепёшкина*
Обложка художника *М. Л. Компанеец*
Художественный редактор *Н. А. Володина*
Технический редактор *И. В. Рыбин*

* * *

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ.

§ 1. Употребление букв.

В алгебре числа обозначаются часто не цифрами, а буквами. Приведём примеры.

Пример 1. Из арифметики известно, что сложение чисел обладает переместительным законом: сумма не изменяется от перестановки слагаемых.

Например:

$$5+7=7+5=12;$$
$$11+20=20+11=31 \text{ и т. д.}$$

Как записать, что этот закон верен не только для чисел 5 и 7 или 11 и 20, а для любых чисел? Поступим так: обозначим одно из слагаемых буквой a, а другое буквой b. Сумму этих чисел запишем, как обычно: $a+b$. Тогда переместительный закон сложения запишется так:

$$a+b=b+a.$$

Эта запись показывает, что какие бы два числа a и b мы ни взяли, получим в сумме одно и то же число, прибавим ли b к a или a к b.

Пример 2. Решим три сходные задачи: *Брат старше сестры на* 3 *года. Сколько лет брату, если сестре:* 1) 5 *лет?* 2) 11 *лет?* 3) 24 *года?*

Получим следующие решения:

$$1)\ 5+3=8;\quad 2)\ 11+3=14;\quad 3)\ 24+3=27.$$

Вообще, каков бы ни был возраст сестры, к нему надо прибавить 3 года, чтобы получить возраст брата. Сформулируем поэтому задачу так: *Брат старше сестры на* 3 *года. Сколько лет брату, если сестре m лет?*

Здесь буквой m обозначен возраст сестры. Значит, возраст брата будет равен $(m+3)$ годам.

В нашей первой задаче $m=5$, во второй $m=11$, в третьей $m=24$.

Мы решили задачу в общем виде. Запись $m+3$ даёт общую формулу решения множества сходных или, как говорят, однородных задач, которые получим, заменяя m различными числами.

Пример 3. В задачниках по арифметике среди упражнений встречаются упражнения, например, такого вида:

$$x+3=11.$$

Требуется найти x.

Здесь буквой x (икс) обозначено неизвестное число — слагаемое. Зная, что каждое из двух слагаемых равно их сумме минус другое слагаемое, найдём x:

$$x=11-3=8.$$

Здесь буква x означает число, которое было сначала для нас неизвестным и которое мы определили, пользуясь правилами арифметики.

В первом примере буквы a и b означали любые числа. Говорят, что в этом случае буквы a и b могут принимать любые числовые значения.

Во втором примере буква m тоже может принимать множество различных значений, но уже не любые. Например, бессмысленно было бы дать букве m значение $m=500$, так как до такого возраста люди не доживают.

Наконец, в третьем примере буква x могла принимать только единственное значение 8, так как при всяком другом значении x равенство $x+3=11$ было бы неверным.

Обычно в алгебре для обозначения чисел употребляются буквы латинского алфавита. (Латинский алфавит приведён в конце книги.)

§ 2. Алгебраические выражения.

Решим задачу.

Ученик купил n тетрадей по 20 коп. за тетрадь и учебник за 85 коп. Сколько заплатил он за всю покупку?

Чтобы узнать стоимость всех тетрадей, надо цену одной тетради умножить на число тетрадей. Значит, стоимость тетрадей будет равна $20\cdot n$ копейкам.

Стоимость же всей покупки будет равна

$$(20\cdot n+85) \text{ копейкам.}$$

Заметим, что перед множителем, выраженным буквой, знак умножения принято опускать, он просто подразумевается. Поэтому предыдущую запись можно представить в таком виде:

$$20n+85.$$

Получили формулу решения задачи. Она показывает, что для решения задачи надо цену тетради умножить на число купленных тетрадей и к произведению прибавить стоимость учебника.

Вместо слова „формула“ для подобных записей употребляют также название „алгебраическое выражение“.

О п р е д е л е н и е 1. **Алгебраическим выражением называется запись, состоящая из чисел, обозначенных цифрами или буквами и соединённых знаками действий.**

Для краткости вместо „алгебраическое выражение“ говорят просто „выражение“.

Приведём ещё примеры алгебраических выражений:

$$\frac{a+3}{b-1}; \quad 3mn; \quad 9(p+q); \quad a; \quad (3+8)\cdot 7; \quad 4{,}5.$$

Из этих примеров видим, что алгебраическое выражение может состоять только из одной буквы, а может совсем не содержать чисел, обозначенных буквами (два последних примера). В этом случае выражение называется также арифметическим выражением.

Дадим в полученном нами алгебраическом выражении $20n+85$ букве n значение 5 (значит, ученик купил 5 тетрадей). Подставив вместо n число 5, получим:

$$20\cdot 5+85,$$

что равно 185 (то есть 1 руб. 85 коп.).

Число 185 называется ч и с л о в о й в е л и ч и н о й или ч и с л о в ы м з н а ч е н и е м данного алгебраического выражения при n, равном пяти.

О п р е д е л е н и е 2. **Числовым значением или просто значением алгебраического выражения при данных значениях букв называется число, которое получится, если в это выражение подставить вместо букв данные их значения и произвести над числами указанные действия.**

Например, мы можем сказать: значение выражения $20n+85$ при $n=2$ равно 125 (1 руб. 25 коп.).

Значение этого же выражения при $n=3$ равно 145 (1 руб. 45 коп.) и т. д.

Мы видим, что значение алгебраического выражения зависит от того, какие значения мы дадим входящим в него буквам. Лишь в виде исключения бывает, что значение выражения не зависит от значений входящих в него букв. Например, выражение $2(a+3)-2a$ равно 6 при любых значениях a.

Найдём в виде примера числовые значения выражения $3a+2b$ при различных значениях букв a и b.

Пусть $a=4$ и $b=2$.

Подставим в данное выражение вместо a число 4, а вместо b число 2 и вычислим полученное выражение.

$$3\cdot 4+2\cdot 2=12+4=16.$$

Итак, при $a=4$ и $b=2$ значение выражения $3a+2b$ равно 16.

Таким же образом найдём, что при $a=5$ и $b=7$ значение выражения будет равно 29, при $a=0$ и $b=1$ оно равно 2 и т. д.

Результаты вычислений можно записать в виде таблицы, которая наглядно покажет, как изменяется значение выражения в зависимости от изменения значений входящих в него букв.

Составим таблицу из трёх строк.

В первой строке будем записывать значения a, во второй — значения b и в третьей — значения выражения $3a+2b$. Получим такую таблицу:

a	4	5	0	3	3
b	2	7	1	5	1
$3a+2b$	16	29	2	19	11

В § 1, говоря о переместительном законе сложения, мы записали, что два выражения $a+b$ и $b+a$ равны:

$$a+b=b+a.$$

Такая запись называется р а в е н с т в о м.

О п р е д е л е н и е 3. **Совокупность двух алгебраических выражений, соединённых знаком равенства, называется равенством.**

В математике, кроме знака равенства, употребляются ещё знаки неравенства:

$>$ — этот знак означает б о л ь ш е,
$<$ — этот знак означает м е н ь ш е.

Например, можно записать:

$5>2$ — читается: пять больше двух;
$3<7$ — нитается: три меньше семи.

Определение 4. **Совокупность двух выражений, соединённых знаком „больше" или „меньше", называется неравенством.**

Следует запомнить, что знак неравенства всегда обращён остриём к меньшему числу.

Пример. Измерив отрезок, получили, что его длина d больше 5 *см*, но меньше 6 *см*. Результат измерения можно записать в виде двойного неравенства:

$$5\ см < d < 6\ см.$$

§ 3. Допустимые значения букв.

Из примеров, приведённых в § 1, заключаем, что буквы, входящие в какое-либо алгебраическое выражение, могут принимать иногда любые значения (первый пример), иногда лишь некоторые, но не любые значения (второй пример) и иногда одно единственное значение (третий пример).

Определение. **Числовые значения, которые могут принимать буквы в данном алгебраическом выражении, называются допустимыми значениями для этих букв.**

Если выражение получилось в результате решения задачи, то совокупность или, как принято говорить в математике, множество допустимых значений для букв определяется условием самой задачи.

Так, в выражении $20n+85$, полученном в § 2, множеством допустимых значений для n является только множество натуральных чисел, так как количество тетрадей может выражаться лишь натуральным числом.

Если о значениях букв в данном выражении ничего не сказано, то для такого выражения допустимыми считаются все те значения букв, при которых выражение не теряет смысла.

Пусть дано выражение:

$$\frac{2x-15}{2}.$$

Найдём его числовое значение при $x=2$. Подставив в него вместо x число 2, получим:

$$\frac{2\cdot 2-15}{2}=\frac{4-15}{2}.$$

Получили в числителе уменьшаемое, которое меньше вычитаемого. Выражение при $x=2$ потеряло смысл. Значит, число 2 не является допустимым значением для x. Легко видеть, что

x здесь может быть только большим или равным $7\frac{1}{2}$. При всех значениях x, меньших $7\frac{1}{2}$, выражение теряет смысл. Коротко эти допустимые значения для x можно записать так: $x \geqslant 7\frac{1}{2}$. Знак $\geqslant$ означает „больше или равно".

В выражении

$$\frac{2}{a-3}$$

допустимыми значениями для a будут уже только числа, бо́льшие трёх, так как при $a=3$ в знаменателе получается нуль, а, как известно из арифметики, на нуль делить нельзя. Запишется это так: $a > 3$.

§ 4. Коэффициент.

Решим задачу.

Карандаш стоит а копеек. Сколько стоят 6 *таких карандашей?*

Ответ. $a \cdot 6$ копеек.

В записи произведения множитель, выраженный цифрами, принято писать впереди буквенных множителей (от перестановки сомножителей произведение не меняется). Поэтому предыдущее выражение запишется так: $6a$.

Сомножитель 6 называется коэффициентом данного выражения.

Определение. **Числовой множитель, стоящий впереди буквенных множителей, называется коэффициентом.**

Если выражение содержит только буквенные множители, то говорят, что его коэффициент равен единице. Действительно, например, выражения ab и $1 \cdot ab$ равны между собой, так как от умножения на единицу величина числа не изменяется. Поэтому коэффициент единица обычно не пишется.

Коэффициент может быть как целым, так и дробным числом.

Пусть дано выражение:

$$ab + ab + ab.$$

В этом выражении число ab взято слагаемым три раза. Но взять число слагаемым три раза — всё равно, что умножить его на три. Значит, можем записать:

$$ab + ab + ab = ab \cdot 3.$$

Так как числовой множитель мы условились писать первым, то получим выражение $3ab$, где 3 — коэффициент. Наоборот, если имеем выражение, например $4a$, где 4 — коэффициент, то можем записать его так:

$$4a = a + a + a + a.$$

Значит, если коэффициент — целое число, то он показывает, сколько раз стоящее за ним выражение берётся слагаемым.

Если же коэффициент — дробное число, то он показывает, какую часть надо взять от значения стоящего за ним выражения. Например, в выражении $1\frac{1}{2}ab$ коэффициент $1\frac{1}{2}$ означает, что при любых значениях a и b надо взять $\frac{3}{2}$ от их произведения. Так, при $a = 5$, $b = 6$ получим:

$$1\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 1\frac{1}{2} \cdot 30 = 45.$$

§ 5. Возведение в степень.

В арифметике при разложении составных чисел на простые множители эти числа записывались в виде произведения степеней простых чисел. Степени записывались с помощью показателя степени.

Напомним об этих понятиях.

Определение 1. **Произведение нескольких равных сомножителей называется степенью.**

Например, числа

$$49 = 7 \cdot 7;$$

$$\frac{9}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5};$$

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

являются соответственно степенями семи, трёх пятых, двух.

Степенями будут и произведения одинаковых сомножителей, записанных буквами, например:

$$aa, \quad xxxx \text{ и т. д.}$$

По числу сомножителей различают вторую, третью и так далее степень, например:

$36 = 6 \cdot 6$ — вторая степень шести;

$\frac{1}{27} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ — третья степень одной трети;

$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ — четвёртая степень пяти и т. д.

В арифметике сложение равных чисел определяется как новое действие — умножение.

При этом число-слагаемое пишется только один раз, а за ним (после знака умножения) пишется число-множитель, которое показывает, сколько раз надо взять слагаемым первое число. Например:

$$3+3+3+3+3=3\cdot 5;$$
$$\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\cdot 3.$$

Подобно этому, умножение равных чисел определяется как новое действие.

Определение 2. **Умножение нескольких равных чисел называется возведением в степень.**

Таким образом, возведение в степень является пятым арифметическим действием.

Определение 3. **Число, которое возводится в степень, называется основанием степени.**

Например, $64=4\cdot 4\cdot 4$ есть третья степень четырёх. Число 4 — основание степени.

Как известно из арифметики, степень коротко записывается так: пишется основание степени и справа от него вверху пишется (более мелко) число, равное количеству перемножаемых сомножителей. Например: $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4$.

Определение 4. **Число, которое показывает, в какую степень возводится основание, называется показателем степени.**

В последнем примере показатель степени — 4.

В выражении 8^2 число 8 — основание степени, 2 — показатель степени, а 8^2 или 64 — степень, именно вторая степень восьми.

Приведём для сравнения одновременно примеры на умножение и на возведение в степень.

Умножение:	Возведение в степень:
$13\cdot 2=13+13=26$	$13^2=13\cdot 13=169$
$\left(2\frac{1}{2}\right)\cdot 3=2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$	$\left(2\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{125}{8}=15\frac{5}{8}$
$3\cdot 4=3+3+3+3=12$	$3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$
$a\cdot 2=a+a=2a$	$aa=a^2$
$x\cdot 3=x+x+x=3x$	$xxx=x^3$

Из самого определения степени (произведение нескольких равных сомножителей) следует, что показатель степени может быть равен двум, трём, четырём и т. д., то есть может быть только натуральным числом, большим единицы.

Введём также показатель, равный единице. Будем считать первой степенью любого числа само это число, например:

$$5^1 = 5; \quad 8{,}35^1 = 8{,}35; \quad a^1 = a.$$

Заметим, что показатель единица обычно не пишется; он подразумевается при всяком числе.

Введение показателя единицы окажется полезным в дальнейшем.

Из арифметики известно, что вторая степень называется иначе квадратом, а третья степень — кубом, что связано с выражением площадей и объёмов в квадратных и кубических единицах. Поэтому и возведение чисел во вторую и третью степень короче называют возведением в квадрат и в куб.

В практике часто приходится иметь дело с возведением чисел в квадрат и куб. Поэтому для облегчения и ускорения вычислений издаются специальные таблицы квадратов и кубов чисел.

Примечание. Полезно убедиться и запомнить, что нуль в любой степени равен нулю, единица в любой степени равна единице.

§ 6. Порядок действий.

Когда в арифметике над числами нужно произвести различные действия, то мы производили их в порядке, установленном особыми правилами. Эти же правила остаются и в алгебре. При этом следует учесть появление нового действия — возведения в степень.

Напомним:

сложение и вычитание называются действиями первой ступени;
умножение и деление называются действиями второй ступени;
возведение в степень назовём действием третьей ступени.

Напомним теперь правила о порядке действий.

Правило 1. ***Действия одной и той же ступени производятся в том порядке, в каком они записаны.***

Пример 1.

$$17 - 11 + 8 = 6 + 8 = 14;$$
$$8 : 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Но иногда бывает удобнее отступить от этого порядка.

Пусть, например, дано выражение:

$$51 - 27 + 19.$$

Произведя действия в порядке записи, получим:

$$51-27=24; \quad 24+19=43.$$

Но вычисления будут легче, если произведём их в таком порядке:

$$51+19=70; \quad 70-27=43.$$

Пример 2.

$$25:10\cdot 4.$$

Разделив 25 на 10, получим дробное число $2\frac{1}{2}$, которое надо умножить на 4.

Вычисления будут гораздо проще, если мы изменим порядок действий и произведём их так:

$$25\cdot 4:10=100:10=10.$$

Как видим, порядок действия одной и той же ступени мы можем иногда изменять (при условии, что все действия после перестановки остаются возможными). Но если в этом нет необходимости, то действия производятся в порядке их записи.

Правило 2. ***Если выражение содержит действия различных ступеней, то сначала производят действия высшей, затем низшей ступени.***

Поясним это правило на примерах.

Пример 1.

$$3+5\cdot 7=3+35=38.$$

Первым произведено умножение (действие второй ступени), затем сложение.

Пример 2.

$$4\cdot 5^2:2=4\cdot 25:2=100:2=50.$$

Первым произведено действие третьей ступени.

Пример 3.

$$5\cdot 2^3-6^2:12=5\cdot 8-36:12=40-3=37.$$

Произведены действия сначала третьей, затем второй и, наконец, первой ступени.

Но иногда приходится отступать от порядка, указанного в правиле 2. Покажем это на задаче.

Задача. *Из двух пунктов выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного a км в час, другого b км в час. Каково расстояние между пунктами, если велосипедисты встретились через t часов?*

Решим задачу по вопросам.

1) Какое расстояние проходили за час оба велосипедиста вместе?

$$a+b.$$

2) Чему равно расстояние между двумя пунктами?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо полученное расстояние $a+b$ умножить на t. Если мы запишем это действие так:

$$a+bt,$$

то ответ будет неверен, так как по правилу 2 мы должны в этом выражении b умножить на t и результат прибавить к a. Нам надо показать, что здесь сначала следует произвести сложение (действие первой ступени), а затем умножение (действие второй ступени). Показывается это при помощи скобок, и выражение записывается так:

$$(a+b)t.$$

Правило 3. ***Если нужно произвести раньше действия низшей ступени, то применяются скобки. Действия над числами, заключёнными в скобки, производятся первыми.***

Приведём примеры.

$11-2\cdot4=11-8=3,$ но $(11-2)\cdot4=9\cdot4=36.$

$5\cdot2^3=5\cdot8=40,$ но $(5\cdot2)^3=10^3=1000.$

$2+3^2=2+9=11,$ но $(2+3)^2=5^2=25.$

$ab^2=abb,$ но $(ab)^2=(ab)(ab)=abab=aabb=a^2b^2.$

Если дано выражение дробное, записанное с помощью черты, то черта заменяет скобки и означает, что надо вычислить отдельно выражение, стоящее в числителе, и отдельно выражение, стоящее в знаменателе, и первый результат разделить на второй.

§ 7. Основные законы сложения и умножения.

В дальнейшем, когда будем изучать действия над числами, изображёнными цифрами или буквами (безразлично), нам придётся во многих выводах опираться на те законы действий, которые изучались в арифметике. В силу важности этих законов для всей математики они называются основными законами действий.

Напомним их.

1. Переместительный закон сложения.

Сумма не изменяется от перемены порядка слагаемых.

Этот закон уже был записан в § 1 в виде равенства:

$$a+b=b+a,$$

где a и b — любые числа.

2. Сочетательный закон сложения.

Чтобы прибавить сумму двух чисел, можно сначала прибавить первое слагаемое и к результату прибавить второе.

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

где a, b и c — любые числа.

Пример:

$$5+(7+11)=5+18=23.$$
$$(5+7)+11=12+11=23.$$

Значит:

$$5+(7+11)=(5+7)+11.$$

Законами переместительности и сочетательности часто пользуются при устных вычислениях, располагая слагаемые так, чтобы легче было их сложить в уме.

Пример 1.

$$89+67+11.$$

Поменяем местами два последних слагаемых, получим:

$$89+11+67.$$

Сложить числа в этом порядке оказалось гораздо легче.

Обычно слагаемые в новом порядке не переписывают, а производят их перемещение в уме: переставив мысленно 67 и 11, сразу складывают 89 и 11 и затем прибавляют 67.

Пример 2.

$$76+87+24+13.$$

Чтобы легче было сложить эти числа в уме, изменим порядок слагаемых так:

$$76+24+87+13.$$

Пользуясь, сочетательным законом, заключим два последних слагаемых в скобки:

$$76+24+(87+13).$$

Сложение чисел в скобках произвести легко, получим:

$$76+24=100; \quad 100+100=200.$$

При устном сложении нескольких чисел надо всегда посмотреть, нельзя ли облегчить вычисления, воспользовавшись переместительным и сочетательным законами сложения.

3. Переместительный закон умножения.

Произведение не изменяется от перемены порядка сомножителей.

$$ab=ba,$$

где a и b — любые числа.

4. Сочетательный закон умножения.

Чтобы умножить на произведение двух сомножителей, можно сначала умножить на первый сомножитель, затем полученный результат умножить на второй сомножитель.

$$a(bc) = (ab)c.$$

Пример 1.

$$5 \cdot (3 \cdot 4) = 5 \cdot 12 = 60.$$
$$(5 \cdot 3) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60.$$

Значит: $5 \cdot (3 \cdot 4) = (5 \cdot 3) \cdot 4$.

Пример 2.

$$50 \cdot (4 \cdot 17).$$

Вместо того, чтобы умножить 4 на 17 и затем 50 на 68, мы на основании сочетательного закона можем это выражение переписать так:

$$(50 \cdot 4) \cdot 17.$$

Выполнить умножение теперь гораздо легче.

Применение переместительного и сочетательного законов умножения часто значительно облегчает устные вычисления.

Пример 1.

$$25 \cdot 37 \cdot 4.$$

Умножить 25 на 37 не очень легко. Переместим два последних сомножителя:

$$25 \cdot 4 \cdot 37.$$

Умножение легко выполняется в уме.

Пример 2.

$$75 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 2.$$

Применив переместительный и сочетательный законы, запишем это выражение так:

$$75 \cdot 4 \cdot (35 \cdot 2).$$

Все действия легко выполняются в уме.

5. Распределительный закон умножения по отношению к сложению.

Чтобы умножить сумму двух чисел на какое-либо число, можно каждое слагаемое умножить на это число и результаты сложить.

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Пример 1. Распределительный закон мы применяем, например, при умножении двузначных (и многозначных) чисел. Так, чтобы умножить 26 на 7, мы представляем 26 в виде суммы $20 + 6$, умножаем 20 на 7, 6 на 7 и результаты складываем:

$$26 \cdot 7 = (20 + 6) \cdot 7 = 20 \cdot 7 + 6 \cdot 7 = 140 + 42 = 182.$$

Но иногда бывает выгоднее поступать наоборот: вместо того, чтобы умножить каждое слагаемое на одно и то же число, сначала находят сумму этих слагаемых и умножают её на данное число.

Пример 2.

$$87 \cdot 28 + 13 \cdot 28.$$

Выполнить устно вычисления здесь трудно.

Представим выражение в другом виде:

$$(87 + 13) \cdot 28.$$

Мы применили здесь распределительный закон, но только записанный в обратном порядке:

$$ac + bc = (a + b)\,c.$$

Теперь вычисление выполняется устно очень легко.

Все приведённые законы остаются верными и тогда, когда число слагаемых или сомножителей больше двух.

§ 8. Первые сведения об уравнениях.

Задача. *К некоторому числу прибавили* 8 *и получили* 17. *Найти это число.*

Решим задачу так: обозначим неизвестное число какой-либо буквой, например a. Прибавив к нему 8, получим $a + 8$. Но по условию задачи эта сумма должна быть равна 17. Значит:

$$a + 8 = 17.$$

Здесь a и 8 являются слагаемыми, а 17 — их суммой. Каждое из двух слагаемых равно их сумме минус другое слагаемое. Значит:

$$a = 17 - 8 \quad \text{или} \quad a = 9.$$

Проверим, подставив 9 вместо a в выражение $a + 8$:

$$9 + 8 = 17.$$

Задача решена верно.

Равенства, в которые входит неизвестное число, носят особое название.

Определение 1. **Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.**

Вот ещё примеры уравнений:

$$2m - 5 = m + 2;$$

$$\frac{3k}{4}+7=13;$$

$$x^2=5x-6.$$

Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется *левой* частью, а стоящее справа — *правой* частью уравнения. В уравнении $a+8=17$, $a+8$ — левая, а 17 — правая часть уравнения.

Определение 2. **Решить уравнение — значит найти те значения неизвестного, при которых обе части уравнения равны одному и тому же числу** (другими словами: все те значения неизвестного, при которых равенство будет верным).

Говорят, что эти значения неизвестного *удовлетворяют* уравнению.

Определение 3. **Значения неизвестного, которые удовлетворяют уравнению, называются решениями, или корнями, уравнения.**

Так, мы видели, что $a=9$ есть решение, или корень уравнения $a+8=17$. Подстановкой можно убедиться, что $m=7$ является решением уравнения $2m-5=m+2$; $k=8$ — уравнения $\frac{3k}{4}+7=13$; $x=2$ и $x=3$ — уравнения $x^2=5x-6$.

Примечание. Большею частью неизвестные числа в уравнении обозначаются последними буквами латинского алфавита: x, y, z. Но это совсем не обязательно. Неизвестное число может быть обозначено любой буквой.

Решение простейших уравнений. Приведём ещё несколько примеров уравнений, которые легко решаются на основании известных из арифметики зависимостей.

Пример 1.

$$x-187=215.$$

Неизвестное число x является уменьшаемым. Но уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с разностью. Следовательно, будем иметь:

$$x=187+215, \quad \text{или} \quad x=402.$$

Проверка. $402-187=215$.

Пример 2.

$$\frac{4}{15}:x=\frac{2}{3}.$$

Делитель равен делимому, делённому на частное.

Следовательно:

$$x = \frac{4}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{15 \cdot 2} = \frac{2}{5}.$$

Проверка. $\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 2} = \frac{2}{3}.$

Решение задач с помощью уравнений. В дальнейшем, по мере изучения алгебры, будет видно, какую огромную роль играют уравнения в решении задач. С помощью уравнений легко решаются многие задачи, которые с большим трудом или даже совсем не могут быть решены арифметически, причём арифметическое решение обычно бывает очень сложным и громоздким. Примеры таких задач будут даны в дальнейших разделах алгебры. Здесь же дадим примеры решения с помощью уравнений некоторых простых задач.

Задача 1. *Для класса были заготовлены тетради. Когда роздали* 48 *тетрадей, то их осталось* 32 *штуки. Сколько тетрадей было заготовлено?*

Составим уравнение по условию задачи. Число заготовленных тетрадей обозначим через x. Когда роздали 48 тетрадей, то запас уменьшился на 48, то есть тетрадей стало:

$$x - 48.$$

Но в задаче сказано, что тетрадей осталось 32. Значит, остаток $x - 48$ должен равняться 32, то есть

$$x - 48 = 32.$$

Решим это уравнение. Неизвестное число — уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с разностью. Значит:

$$x = 48 + 32, \quad \text{или} \quad x = 80.$$

Проверка. $80 - 48 = 32.$

Задача 2. *Я задумал число. Когда умножил его на* 13, *то получил* 143. *Какое число я задумал?*

Обозначим задуманное число буквой x.

Умножив его на 13, получим $x \cdot 13$ или $13x$. Но по условию тогда должно получиться 143. Значит:

$$13x = 143.$$

Находим x как неизвестный сомножитель:

$$x = 143 : 13, \quad \text{или} \quad x = 11.$$

Проверка. $13 \cdot 11 = 143.$

При решении уравнений следует принимать во внимание, какие числовые значения может принимать неизвестное, обозначенное буквой, то есть какие значения являются для него допустимыми.

Так, в задаче 1 допустимыми значениями для неизвестного могут быть только натуральные числа. В задаче 2 допустимыми являются как целые, так и дробные значения неизвестного.

После решения уравнений во всех указанных задачах точно устанавливается, какие именно из допустимых значений может принимать неизвестное, чтобы равенство было верным.

§ 9. Краткие исторические сведения.

Первые алгебраические сведения можно найти у древних народов. Так, древние вавилоняне за 4000 лет до нашей эры умели решать довольно трудные уравнения.

В древнем египетском сочинении по математике (около 2000 лет до нашей эры) также содержались некоторые сведения из алгебры.

Особо следует отметить сочинение выдающегося математика IX века нашей эры Мухаммеда Аль-Хорезми. Самое прозвище его, Аль-Хорезми, указывает на его родину — Хорезм (ныне Узбекская ССР). Его сочинение по математике содержит подробное изложение алгебраических знаний того времени. В те времена ещё не были введены специальные знаки для сокращённой записи формул и правил. Не было, например, знаков сложения и вычитания, знака равенства и пр. Поэтому Аль-Хорезми все правила излагал полностью словами.

Желая сократить запись, математики стали прибегать к сокращениям некоторых часто встречающихся слов. Например, при сложении и вычитании вместо слов „плюс“ и „минус“ писали только первые буквы: *п* и *м*.

Обозначение чисел буквами принято в математике со времени французского математика Виета (1540—1603). В своём математическом сочинении Виет обозначал неизвестные числа гласными буквами латинского алфавита, а известные — согласными. Введение буквенных обозначений имело большое значение. С помощью букв стало возможным записывать правила и формулы в общем виде для любых чисел.

В 1703 году в России вышел учебник по математике русского математика-педагога Л. Ф. Магницкого. Назывался он „Арифметика“, но на самом деле содержал не только арифметику, а и сведения из алгебры, геометрии, астрономии, геодезии и др. Л. Ф. Магницкий, так же как и Виет, употреблял для обозначения неизвестных чисел гласные буквы („литеры гласные, полагаемые за непознанное числ“), а для обозначения известных — согласные („согласные, полагаемые за количества данных числ“).

Книга Л. Ф. Магницкого в течение десятков лет была в России основным руководством по математике. По ней учился великий русский учёный М. В. Ломоносов.

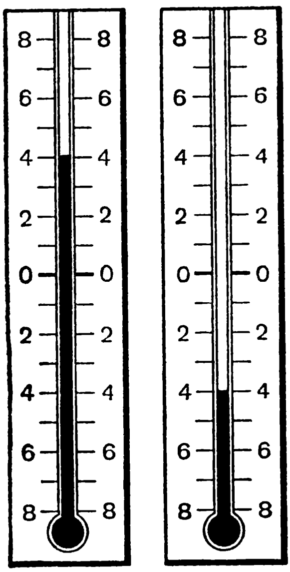
Современный вид алгебраические записи приняли в работах знаменитого английского учёного Исаака Ньютона (1642—1727). Вот пример его записи: $ax^3+bx^2+cx+d=0.$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 10. Положительные и отрицательные числа.

Если на вопрос „Какова температура воздуха сейчас?“ ответить: „Термометр показывает 4°“,— то это не будет точным ответом: термометр может показывать 4° тепла или 4° холода (черт. 1).



Черт. 1.

Говорят также: 4° выше нуля и 4° ниже нуля. Эти пояснительные слова: „тепло“, „холод“, „выше нуля“, „ниже нуля“ — приходится добавлять потому, что температура может от нуля изменяться в двух противоположных направлениях.

Она может повышаться (ртуть в термометре движется от нуля вверх) и понижаться (ртуть движется от нуля вниз).

Но когда передают по радио сводку погоды, то этих пояснительных слов не употребляют. Говорят коротко, например, так: „В Якутске было минус 6°, в Мурманске минус 1°, в Казани плюс 1°, в Минске плюс 3°, в Ростове плюс 12°“.

Таким образом, вместо слов „выше“ или „ниже нуля“ к числу градусов присоединяют знак плюс или минус.

Указанную температуру можно записать так:

Якутск	$-6°$	Минск	$+3°$
Мурманск	$-1°$	Ростов	$+12°$
Казань	$+1°$		

Эту запись так и понимают, что температура в Якутске была 6° ниже нуля, в Казани 1° выше нуля и т. д.

Однако часто, когда термометр показывает тепло, то знак плюс опускают и вместо $+13°$ пишут просто 13°.

Таким образом, для обозначения температуры выше нуля употребляются числа 1, 2, 3, $3\frac{1}{2}$, 7 и т. д., то есть те числа, которые известны из арифметики. Они называются **положительными** числами.

Для обозначения температуры ниже нуля употребляются новые числа: -1, -2, -3, $-3\frac{1}{2}$, -7 и т. д. Они называются **отрицательными** числами.

Температура в нуль градусов выражается числом нуль. Это число не относится ни к положительным, ни к отрицательным числам. Перед ним можно поставить и знак плюс, и знак минус или не ставить никакого. Записи: 0; $+0$; -0 обозначают одно и то же число — нуль.

Отрицательные числа применяются не только при измерении температуры. Приведём примеры.

Имущество и долг. Ещё более тысячи лет тому назад индийский математик и астроном Брамагупта (VII век) обозначал имущество положительными, а долг отрицательными числами (§ 29).

Точно так же положительные и отрицательные числа можно применять для обозначения: будущего и прошедшего времени, прихода и расхода, поступлений в кассу и выдач из неё и т. п.

Изменение величин. Мы можем применить положительные и отрицательные числа к измерению изменений величин, записывая положительными числами их увеличение и отрицательными — уменьшение. Например, положительными числами можно записывать повышение, а отрицательными — понижение температуры.

Числа положительные (целые и дробные), отрицательные (целые и дробные) и нуль составляют множество **рациональных** чисел.

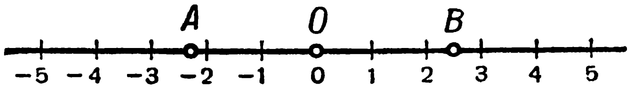
§ 11. Числовая ось.

Отметим на прямой произвольную точку O (черт. 2). Назовём её начальной точкой. Выберем какую-либо единицу длины, например один сантиметр. Отложим на прямой вправо от точки O один за другим отрезки, равные 1 *см*. Конец первого отрезка обозначим числом 1, конец второго — числом 2 и т. д.

Те же самые построения выполним слева от точки O.

Концы отрезков, проведённых влево от точки O, будем обозначать числами -1, -2, -3 и т. д.

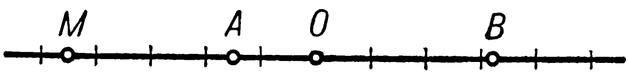
Понятно, что по обеим сторонам от точки O можно отложить и отрезки, выражающиеся любым дробным числом. Например, на чертеже 2 точка B изображает число $2\frac{1}{2}$, точка A число —2,3.



Черт. 2.

Определение. **Прямая, на которой каждое число изображается соответствующей точкой, называется числовой прямой или числовой осью.**

Чтобы найти, где расположена на числовой оси точка M (черт. 3), соответствующая, например, числу $-4\frac{1}{2}$, откладываем



Черт. 3.

от точки O влево отрезок, равный $4\frac{1}{2}$ выбранным единицам длины $\left(\text{в нашем случае } 4\frac{1}{2}\ см\right)$.

Для краткости вместо слов „точка, соответствующая числу a“ говорят просто „точка a“. Таким образом, на числовой оси (черт. 3) изображены точки: $-1\frac{1}{2}$ (точка A), 3,2 (точка B), нуль (точка O).

В предыдущем параграфе мы уже встретились с числовой осью: шкала термометра представляет собой часть числовой оси.

В дальнейшем при изучении алгебры нам много раз придётся пользоваться числовой осью.

Числа, расположенные на оси по разные стороны от начальной точки и на одинаковом расстоянии от неё, называются противоположными. Так, число -5 противоположно числу $+5$ (или просто 5); число 2 противоположно числу -2 и т. д. Число 0 (нуль) противоположно самому себе. Заметим, что и самые знаки $+$ и $-$ называются противоположными.

§ 12. Сравнение рациональных чисел.

Мы умеем сравнивать между собой любые положительные числа, то есть всегда сможем указать, какое из двух данных положительных чисел больше и какое меньше.

Теперь, когда введены новые, отрицательные числа, нужно установить правило сравнения этих чисел как между собой, так и с положительными числами.

Для этого обратимся к числовой оси. Посмотрим, как расположены на ней положительные числа, сравнивать которые мы уже умеем.

Мы видим, что по мере продвижения вправо от точки O положительные числа становятся всё больше и больше. По мере продвижения влево (к точке O) числа, наоборот, уменьшаются до нуля. Значит, можно сказать: из двух положительных чисел то больше, которое на числовой оси расположено правее.

Распространим этот признак на всю числовую ось, то есть будем считать, что из любых двух чисел то больше, которое расположено правее на числовой оси.

Отсюда вытекают следующие положения:

1. Всякое положительное число больше нуля и больше всякого отрицательного числа.

2. Всякое отрицательное число меньше нуля.

3. Из двух отрицательных чисел то больше, которое правее расположено на числовой оси.

Например:

$$3>0; \quad 1>-5; -\frac{1}{2}<0; \quad -3>-10; \quad -4<-1.$$

§ 13. Абсолютная величина числа.

Из некоторого пункта O выехали в противоположных направлениях два автомобиля. Первый прошёл 40 *км* вправо от пункта O, второй прошёл 50 *км* влево. Который из них прошёл большее расстояние?

Желая показать не только пройденный путь, но и направление его, мы можем записать, что первый автомобиль прошёл $+40$ *км* или просто 40 *км*, а второй прошёл -50 *км*. Но если мы скажем, что первый автомобиль прошёл большее расстояние, так как $40>-50$, то сделаем грубую ошибку.

Сравнивая расстояния, пройденные обоими автомобилями, мы интересуемся только величиной пройденного пути независимо от направления, в каком этот путь пройден. А пройденный путь мы всегда записывали арифметическим, то есть положительным, числом. Значит, вместо числа -50, мы должны взять противоположное ему число $+50$, которое и выражает число километров, пройденное вторым автомобилем. В этом случае говорят, что мы берём абсолютную величину числа -50.

Определение 1. **Абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему число.**

Таким образом, абсолютная величина числа -10 равна $+10$, числа $-0,3$ равна $+0,3$ и т. д.

Для обозначения абсолютной величины числа употребляется особый знак — данное число заключается между двумя вертикальными чертами так: $|-50|$.

Значит, можно записать:

$$|-50|=50;\quad |-0,3|=0,3;\quad \left|-\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5};\ |-3,87|=3,87.$$

Итак, на вопрос, поставленный выше, должны ответить так: второй автомобиль прошёл большее расстояние, так как

$$|-50|>40.$$

Мы сравниваем здесь абсолютную величину числа -50 с числом 40. В целях единства вводится также понятие абсолютной величины и для положительных чисел и для нуля.

Определение 2. **Абсолютной величиной положительного числа и нуля называется само это число.**

Следовательно:

$$|5|=5;\ |40|=40;\ |0|=0 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, сравнивая расстояния, пройденные автомобилями, можем сказать, что сравниваем абсолютные величины чисел -50 и 40 и убеждаемся, что

$$|-50|>|40|.$$

Записи: $5; +5; |5|$ — обозначают одно и то же положительное число пять. Очень важно запомнить, что и запись $|-5|$ означает то же самое число пять.

$$5=+5=|5|=|+5|=|-5|.$$

В предыдущем параграфе мы установили правило для сравнения отрицательных чисел. Согласно этому правилу можно написать, например:

$$-5>-15;\quad -3>-3,5;\quad -1>-2 \text{ и т. д.}$$

Но если возьмём абсолютные величины этих чисел и сравним их, то получим:

$$|-5|<|-15|;\ |-3|<|-3,5|;\ |-1|<|-2| \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что если одно отрицательное число больше другого, то его абсолютная величина меньше абсолютной величины другого, и наоборот, если абсолютная величина одного отрицательного числа больше абсолютной величины другого отрицательного числа, то само это число меньше другого числа.

Например: $|-15| > |-8|$, но $-15 < -8$.

$$\left|-1\frac{1}{4}\right| > |-1|, \quad \text{но} \quad -1\frac{1}{4} < -1.$$

Теперь правило сравнения отрицательных чисел можно выразить по-другому, совсем не касаясь расположения их на числовой оси.

Правило. ***Из двух отрицательных чисел то больше, абсолютная величина которого меньше.***

Поэтому

$$-11 > -12, \text{ так как } |-11| < |-12|;$$
$$-1{,}2 < -1, \text{ так как } |-1{,}2| > |-1| \text{ и т. д.}$$

§ 14. Сложение рациональных чисел.

Нам нужно теперь установить правила действий с рациональными числами, то есть правила сложения, вычитания, умножения и деления любых рациональных чисел. Начнём со сложения.

Постараемся установить такое правило сложения рациональных чисел, чтобы выполнить три следующих требования:

1. Чтобы задачи, которые в арифметике (то есть для положительных чисел) решались сложением, решались бы тем же действием в случае любых рациональных чисел.

2. Чтобы правило сложения любых рациональных чисел осталось для положительных чисел тем же, каким мы его знаем из арифметики.

3. Чтобы основные законы сложения, установленные для положительных чисел (§ 7), сохранились и для сложения любых рациональных чисел.

Возьмём поэтому задачу, которая в арифметике решалась сложением, например:

Термометр показывал $a°$. Затем температура повысилась на $b°$. Сколько градусов показывает термометр теперь?

Очевидно, что при положительных a и b для решения этой задачи мы должны к $a°$ прибавить $b°$. Получим ответ:

$$(a + b) \text{ градусов.}$$

Проверим это на примере.

1) Пусть $a = +4$; $b = +2$.

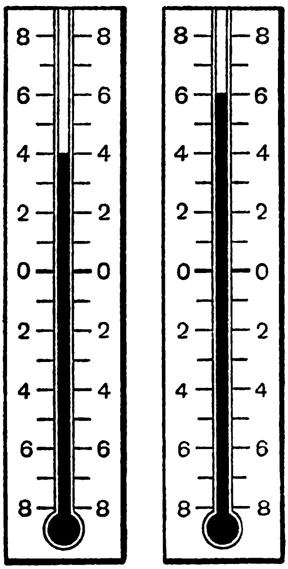
Значит, термометр показывал 4° тепла, затем температура повысилась на 2°. Очевидно, термометр показывает теперь 6° (черт. 4).

Следовательно:

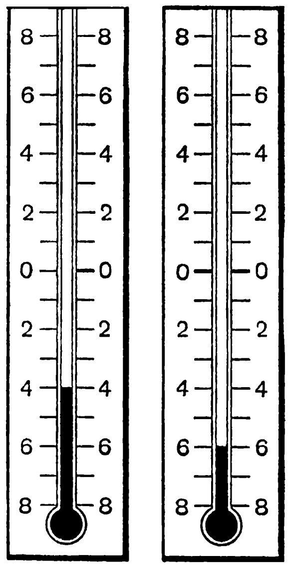
$$(+4)+(+2)=+6,$$

как и должно быть.

Посмотрим теперь, какие значения должна принимать сумма $a+b$ при различных рациональных (не только положительных) значениях a и b.



Черт. 4.



Черт. 5.

2) Пусть $a=-4$; $b=-2$.

Значит, термометр показывал сначала 4° холода, затем температура ещё понизилась на 2°. Ясно, что теперь термометр показывает $-6°$ (черт. 5).

Следовательно:

$$(-4)+(-2)=-6.$$

Сравнивая результаты задач 1 и 2, установим следующее правило.

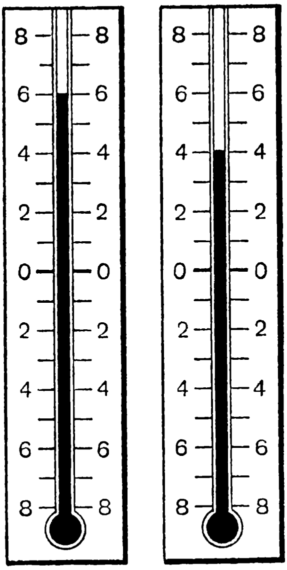
Правило 1. ***Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и перед результатом поставить их общий знак.***

Так, чтобы сложить -11 и -8, сложим их абсолютные величины, то есть 11 и 8, и перед полученным числом 19 поставим знак минус. Получим: $(-11)+(-8)=-19$.

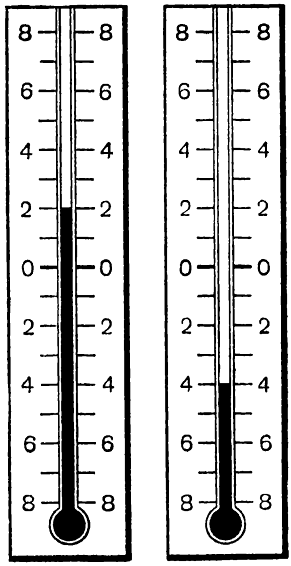
Это правило оставляет сложение положительных чисел таким, каким мы его знаем из арифметики. (Значит, второе требование нами выполнено.)

3) Пусть $a = +6$, $b = -2$.

Значит, термометр показывал сначала 6° тепла, а затем температура понизилась на 2°. Очевидно, сейчас термометр показывает 4° тепла (черт. 6).



Черт. 6.



Черт. 7.

Следовательно, если мы хотим, чтобы и в этом случае задача решалась сложением, то должны будем записать:

$$(+6) + (-2) = +4.$$

4) Пусть $a = +2$, $b = -6$.

Так же, как и в предыдущем случае, найдём, что термометр после понижения на 6° стал показывать 4° холода (черт. 7).

Значит, решая и эту задачу сложением, мы должны записать:

$$(+2) + (-6) = -4.$$

Рассматривая случаи 3 и 4, установим правило.

Правило 2. ***Чтобы сложить два числа с противоположными знаками и с разной абсолютной величиной, надо из большей абсолютной величины вычесть меньшую и перед разностью поставить знак числа с большей абсолютной величиной.***

Так, например, по этому правилу получим:

$$(-5)+(+7)=+2;$$
$$(+5)+(-7)=-2;$$
$$(-3{,}5)+(+1{,}2)=-2{,}3.$$

5) Пусть $a=+3$, $b=-3$.

Если термометр показывал 3° тепла, а затем температура понизилась на 3°, то термометр будет показывать 0°. Ясно также, что какое бы число a° ни показывал термометр, если затем температура понизится на a°, то термометр будет показывать 0°.

Значит:

Правило 3. ***Сумма двух противоположных чисел равна нулю.***

$$a+(-a)=0.$$

Отметим, что будет верно и обратное положение.

Если сумма двух чисел равна нулю, то эти числа взаимно противоположны.

Наконец, легко установить (и проверить на том же термометре), что, например:

$$2+0=2 \qquad -3+0=-3 \qquad 0+0=0$$
$$0+2=2 \qquad 0+(-3)=-3$$

Правило 4. ***Если одно из двух слагаемых равно нулю, то их сумма равна другому слагаемому.***

Установленные здесь четыре правила исчерпывают все возможные случаи сложения рациональных чисел.

§ 15. Законы сложения.

Убедимся в том, что правила сложения рациональных чисел оставляют в силе основные законы сложения, установленные для положительных чисел.

Переместительный закон. Для любых рациональных чисел a и b справедливо равенство:

$$a+b=b+a.$$

Это следует из правил сложения рациональных чисел.

В самом деле, если числа имеют одинаковые знаки (правило 1), то мы складываем их абсолютные величины, то есть положительные числа, а для них переместительное свойство сложения уже было доказано.

Если же числа имеют противоположные знаки (правило 2), то мы из большей абсолютной величины вычитаем меньшую, независимо от того, стоит ли число с большей абсолютной величиной на первом или на втором месте. Значит, и здесь величина суммы не зависит от порядка слагаемых.

В правилах 3 и 4 ничего не говорится о порядке слагаемых, значит, они верны при любом порядке слагаемых.

Сочетательный закон. Для любых рациональных чисел справедливо равенство:

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

В этом можно убедиться на примере:

$$(-5)+[(+3)+(-7)]=(-5)+(-4)=-9$$

и

$$[(-5)+(+3)]+(-7)=(-2)+(-7)=-9.$$

Так же, как для положительных чисел, переместительный и сочетательный законы сложения остаются справедливыми и тогда, когда число слагаемых больше двух.

§ 16. Сложение нескольких чисел.

Чтобы сложить несколько рациональных чисел, сложим по установленному правилу первые два слагаемых, затем к полученной сумме прибавим третье слагаемое, к полученной сумме прибавим четвёртое и так далее, до конца.

Например:

$$(-7)+(+5)+(+2)+(-3)+(+9)=$$
$$=(-2)+(+2)+(-3)+(+9)=0+(-3)+(+9)=$$
$$=(-3)+(+9)=+6.$$

Но можно вывести другое правило сложения нескольких рациональных чисел, которое часто упрощает вычисления.

Пользуясь переместительным законом, расположим (мысленно) слагаемые так, чтобы сначала стояли все положительные слагаемые, а за ними все отрицательные. Затем, пользуясь сочетательным законом, сложим отдельно все положительные слагаемые и отдельно все отрицательные. Получим два числа, которые сложим по правилу сложения двух рациональных чисел.

Так, в предыдущем примере можно было провести вычисления в таком порядке:

1) $(+5)+(+2)+(+9)=+16;$
2) $(-7)+(-3)=-10;$
3) $(+16)+(-10)=+6.$

Значит, можно дать такое правило сложения.

Правило. ***Чтобы сложить несколько рациональных чисел, можно сложить отдельно все положительные, отдельно все отрицательные числа и полученные два числа сложить по правилу сложения двух чисел.***

§ 17. Вычитание рациональных чисел.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Вычесть из одного числа другое — значит найти такое третье число, которое, будучи сложено со вторым числом, даст первое число.

Другими словами, вычесть из какого-либо числа a число b — значит найти такое третье число c, чтобы было справедливо равенство:

$$c+b=a.$$

Например:

$$5-(+7)=-2, \quad \text{так как} \quad (-2)+(+7)=+5;$$
$$(-3)-(+8)=-11, \quad \text{так как} \quad (-11)+(+8)=-3;$$
$$(-1)-(-5)=+4, \quad \text{так как} \quad (+4)+(-5)=-1.$$

Чтобы вывести общее правило вычитания для любых рациональных чисел, поступим следующим образом. Заменим в предыдущих примерах вычитание прибавлением числа, противоположного вычитаемому. Получим:

$$5+(-7)=-2;$$
$$(-3)+(-8)=-11;$$
$$(-1)+(+5)=+4.$$

Как видим, мы получили те же результаты, что и при вычитании. Отсюда можем вывести следующее правило.

Правило. ***Чтобы вычесть какое-либо число, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.***

$$a-b=a+(-b).$$

Докажем это правило.

Нам надо доказать справедливость равенства

$$a-b=a+(-b) \tag{1}$$

при любых a и b.

В левой части равенства число a — уменьшаемое, число b — вычитаемое. Значит, выражение $a+(-b)$ в правой части является разностью этих чисел. Следовательно, равенство (1) будет верным, если разность $a+(-b)$, сложенная с вычитаемым b, даст уменьшаемое a.

Проверим это, сложив $a+(-b)$ и b; получим

$$[a+(-b)]+(+b).$$

По сочетательному закону сложения это выражение запишем так:

$$a+[(-b)+(+b)].$$

Но сумма в квадратных скобках равна нулю, как сумма двух противоположных чисел.

Следовательно, будем иметь:

$$[a+(-b)]+(+b)=a+[(-b)+(+b)]=a+0=a.$$

Получили уменьшаемое. Значит, равенство (1) верно.

Приведённое правило заменяет вычитание сложением, а правило сложения нам уже известно.

Итак, оказалось, что вычитание одного рационального числа из другого можно свести к сложению двух рациональных чисел. Но сложение двух рациональных чисел всегда возможно и даёт единственный результат (§ 14). Значит, мы можем заключить, что в множестве рациональных чисел всегда возможно вычитание и даёт единственный результат (как говорят, однозначно). Этим множество рациональных чисел существенно отличается от множества положительных чисел, где, как мы знаем, сложение всегда возможно, а вычитание не всегда.

§ 18. Свойства сложения и вычитания.

В § 15 было показано, что переместительный и сочетательный законы сложения остаются в силе и для любых рациональных чисел. Но отсюда следует, что для рациональных чисел остаются справедливыми и те свойства сложения и вычитания, которые были выведены из этих законов. Напомним их.

1. Прибавление суммы.

Чтобы прибавить сумму нескольких чисел, можно прибавить первое слагаемое, к полученному результату прибавить второе, к полученному результату третье и так далее до конца.

Пример.

$$(-5)+[(-3)+(+15)+(-4)]=(-5)+(+8)=3$$

и $$(-5)+(-3)+(+15)+(-4)=(-8)+(+15)+(-4)=$$
$$=(+7)+(-4)=3.$$

Из арифметики мы знаем, что этим свойством пользуются для упрощения вычислений. Приведём примеры.

Пусть требуется вычислить сумму:

$$35+(25+40+27).$$

Скобки показывают, что нужно сначала сложить числа, заключённые в скобках, получим 92. Прибавив 92 к 35, получим 127.

Пользуясь же только что указанным свойством, мы можем произвести вычисления в таком порядке:

$$35+25=60; \quad 60+40=100; \quad 100+27=127.$$

Вычисления оказались легче.

Приведём ещё пример. Вычислим сумму:

$$187+46+38+54+113.$$

Переместим слагаемые так:

$$187+113+46+54+38.$$

Произведём сложение в таком порядке:

$$(187+113)+(46+54)+38=300+100+38=438.$$

Такое одновременное применение переместительного и сочетательного законов иногда выражают кратко в виде следующего правила.

Слагаемые можно соединять в группы любым способом.

2. Прибавление разности.

Чтобы прибавить разность, можно прибавить уменьшаемое и от результата отнять вычитаемое.

Например:

$$(-7)+[(+3)-(-10)]=(-7)+(+13)=6$$

и $[(-7)+(+3)]-(-10)=(-4)-(-10)=(-4)+(+10)=6.$

Значит: $(-7)+[(+3)-(-10)]=[(-7)+(+3)]-(-10).$

В общем виде это свойство можно записать так:

$$a+(b-c)=(a+b)-c.$$

Этим свойством также пользуются при устных вычислениях. Пусть, например, надо сложить 28 и 39. Так как $39=40-1$, то $28+39=28+(40-1)=(28+40)-1=67$.

Для любых рациональных чисел остаются справедливыми и все те свойства вычитания, которые были установлены для положительных чисел.

3. Вычитание суммы.

Чтобы вычесть сумму нескольких чисел, можно вычесть первое слагаемое, из результата вычесть второе и так далее до конца.

Пример.

$$(-7)-[(-3)+(+8)]=(-7)-(+5)=-12$$

и $[(-7)-(-3)]-(+8)=(-4)+(-8)=-12,$

4. **Вычитание разности.**

Чтобы вычесть разность, можно вычесть уменьшаемое и к результату прибавить вычитаемое.

Пример.

$$(-8)-[(-6)-(+3)]=(-8)-(-9)=1$$

и

$$[(-8)-(-6)]+(+3)=(-2)+(+3)=1.$$

В общем виде:

$$a-(b-c)=(a-b)+c.$$

Этим свойством также пользуются для упрощения вычислений, например:

$$253-197=253-(200-3)=253-200+3=56.$$
$$257-(257-78)=257-257+78=78.$$

§ 19. Алгебраическая сумма.

Возьмём выражение:

$$(+7)-(+4)+(+2)-(-5)-(+3), \qquad (1)$$

включающее несколько сложений и вычитаний.

На основании правила вычитания мы можем все вычитания заменить сложением чисел, противоположных вычитаемым. Получим:

$$(+7)+(-4)+(+2)+(+5)+(-3). \qquad (2)$$

Таким образом, все числа в выражении (1) стали слагаемыми.

Определение. **Сумма, в которой слагаемыми являются положительные и отрицательные числа (в частности, и нули), называется алгебраической суммой.**

Всякое выражение, состоящее из сложений и вычитаний, можно представить в виде алгебраической суммы.

Например: $a+(-b)-(-c)-(+d)+(-e)=$
$=a+(-b)+(+c)+(-d)+(-e)$.

Для упрощения записи мы можем везде знак сложения опустить запомнив раз навсегда, что каждый знак в выражении относится к следующему за ним числу и что все эти числа следует сложить. Так, выражение (2) можно записать короче: $7-4+2+5-3$.

Это выражение и показывает, что надо сложить числа 7; -4; $+2$; $+5$; -3.

§ 20. Умножение.

При установлении правила умножения для любых рациональных чисел положим в основу те же требования, что и для сложения рациональных чисел (в § 14).

Возьмём опять задачу на изменение температуры.

Температура повышается каждый час на a°. В настоящий момент термометр показывает 0°. Сколько градусов будет показывать термометр через t часов?

Как и раньше, будем обозначать уменьшение температуры отрицательными числами.

Кроме того, в задачу входит ещё и время, в течение которого изменялась температура. Условимся время, отсчитываемое от настоящего момента вперёд, то есть в будущее, считать положительным, а время, отсчитываемое назад, в прошлое, считать отрицательным.

Вернёмся к задаче. Так как каждый час температура повышалась на a°, то через t часов температура повысится на at градусов.

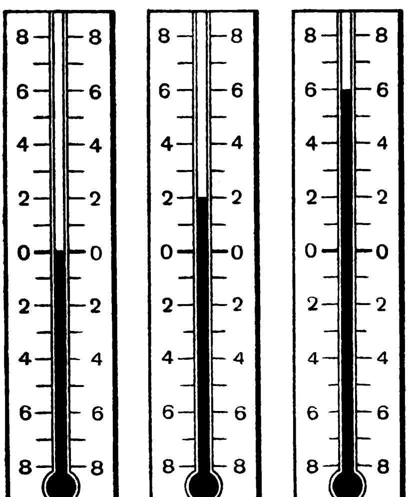
Посмотрим, чему будет равно произведение at при различных значениях a и t.

1) $a=2$; $t=3$.

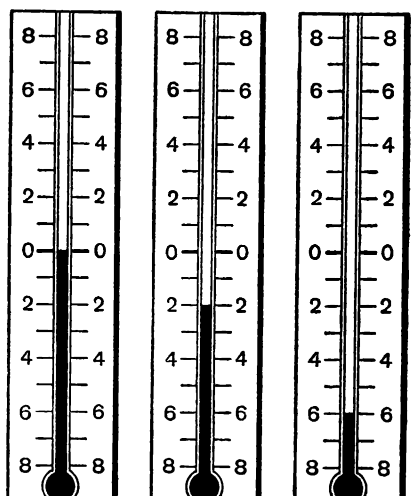
В настоящий момент термометр показывает 0°. В течение трёх часов температура будет повышаться каждый час на 2°. Очевидно, что за 3 часа температура повысится на 6° (черт. 8). Значит: $2 \cdot 3 = 6$.

2) $a=-2$; $t=3$.

Температура понижается каждый час на 2°. Значит, за 3 часа она понизится на 6° (черт. 9). Таким образом: $(-2) \cdot 3 = -6$.


Теперь Через час Через три часа

Черт. 8.


Теперь Через час Через три часа

Черт. 9.

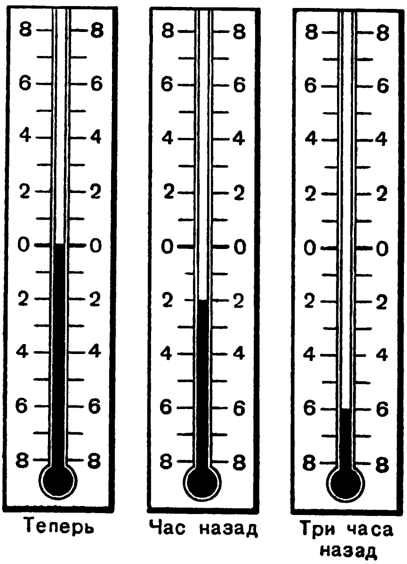
3) $a=2;\quad t=-3$.

Температура повышается каждый час на 2°. Сейчас термометр показывает 0°. Значит, 3 часа тому назад температура была ниже нуля на 6° (за 3 часа температура поднималась каждый час на 2° и достигла к настоящему моменту нуля) (черт. 10). Значит: $2\cdot(-3)=-6$.

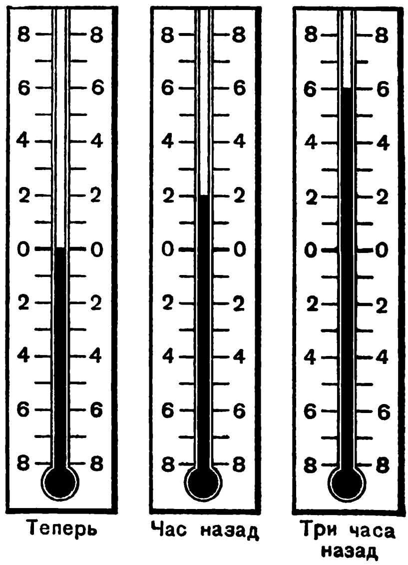
4) $a=-2;\quad t=-3$.

Температура понижается каждый час на 2°. Сейчас 0°. Значит, 3 часа тому назад она должна была быть выше нуля на 6° (понижаясь каждый час на 2°, она за 3 часа достигнет нуля) (черт. 11).

Отсюда: $(-2)\cdot(-3)=6$.



Черт. 10.



Черт. 11.

Сопоставим все рассмотренные случаи умножения:

$$2\cdot 3=6;$$
$$(-2)\cdot(-3)=6;$$
$$(-2)\cdot 3=-6;$$
$$2\cdot(-3)=-6.$$

Учитывая полученные результаты, введём следующее правило умножения рациональных чисел.

П р а в и л о 1. ***Произведение двух чисел равно произведению их абсолютных величин, взятому со знаком плюс, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если сомножители имеют противоположные знаки.***

Таким образом, согласно введённому правилу, получим:

$$(-3)\cdot 5 = -15; \quad \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{5} = -\frac{6}{25};$$

$$4\cdot(-25) = -100.$$

Кроме того, будем иметь при любом a:

$$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$$

(произведение абсолютных величин двух чисел, из которых хотя бы одно равно нулю, будет тоже равно нулю).

П р а в и л о 2. ***Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.***

§ 21. Законы умножения.

Для рациональных чисел остаются справедливыми те же законы умножения, которые были приведены в § 7 для положительных чисел.

1. Переместительный закон.

Произведение не меняется от перемены порядка сомножителей.

$$ab = ba.$$

Это следует из самого определения умножения рациональных чисел. В самом деле, мы берём произведение абсолютных величин, а оно не зависит от порядка, в котором берём эти абсолютные величины.

Знак произведения тоже определяем независимо от того, в каком порядке эти знаки следовали. Мы смотрим только, одинаковые ли знаки у обоих сомножителей или различные.

2. Сочетательный закон.

Чтобы умножить на произведение двух чисел, можно умножить на первый сомножитель и полученный результат умножить на второй сомножитель.

$$a(bc) = (ab)c.$$

В самом деле, в выражении $a(bc)$ мы должны абсолютную величину a умножить на произведение абсолютных величин b и c;

в выражении $(ab)c$ мы должны произведение абсолютных величин a и b умножить на абсолютную величину c. Но для абсолютных величин, то есть положительных чисел, сочетательный закон верен.

Значит, абсолютная величина обеих частей равенства одна и та же. Легко также убедиться, что и знак обоих произведений будет один и тот же, каковы бы ни были знаки чисел a, b и c.

3. Распределительный закон.

Чтобы умножить сумму двух чисел на какое-либо число, можно умножить каждое слагаемое на это число и результаты сложить.

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Убедимся в этом на нескольких примерах.

1) $[2+(-3)]\cdot 4=2\cdot 4+(-3)\cdot 4.$

Действительно:

$$[2+(-3)]\cdot 4=(-1)\cdot 4=-4.$$
$$2\cdot 4+(-3)\cdot 4=8-12=-4.$$

2) $[(-3)+5]\cdot(-6)=(-3)\cdot(-6)+5\cdot(-6).$

Действительно:

$$[(-3)+5]\cdot(-6)=2\cdot(-6)=-12.$$
$$(-3)\cdot(-6)+5\cdot(-6)=18-30=-12.$$

Как переместительный, так и сочетательный законы умножения остаются справедливыми и тогда, когда число сомножителей больше двух.

Точно так же и распределительный закон остаётся справедливым и тогда, когда число слагаемых больше двух.

Пример:

$$[(7+(-3)+(-2)+5)]\cdot(-2)=$$
$$=7\cdot(-2)+(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)+5\cdot(-2).$$

Проверить справедливость этого равенства предлагаем учащимся.

§ 22. Умножение нескольких чисел.

Если нужно найти произведение нескольких чисел, то поступают так: по правилу, установленному в предыдущем параграфе, находят произведение первых двух чисел, затем этот результат умножают на третий данный сомножитель, полученный результат умножают на четвёртый и так далее до конца. Например:

$$(-3)\cdot 4\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot 6=(-12)\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot 6=$$
$$=24\cdot(-5)\cdot 6=(-120)\cdot 6=-720.$$

Но более употребителен другой способ умножения нескольких чисел.

При умножении приходится всё время перемножать абсолютные величины: сначала находим произведение абсолютных величин первых двух чисел, затем произведение абсолютной величины результата и абсолютной величины третьего числа и т. д. Значит, абсолютная величина всего произведения будет равна произведению абсолютных величин всех сомножителей.

Так, в приведённом выше примере мы могли бы сначала найти произведение:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Получим абсолютную величину искомого произведения.

Остаётся определить знак произведения.

Для этого заметим, что если расположим все отрицательные сомножители рядом (а это мы можем сделать по переместительному закону умножения), то произведение каждых двух из них будет положительным. Значит, если отрицательных сомножителей чётное число, то, разбив их на пары и перемножив числа каждой пары, (по сочетательному закону умножения произведение не изменится), получим только положительные числа. Значит, и всё произведение будет положительным.

Если же отрицательных сомножителей нечётное число, то при разбивке их на пары один отрицательный сомножитель останется. Каждая пара отрицательных сомножителей даст в произведении положительное число, произведение всех положительных чисел будет тоже положительное. Когда же мы это произведение умножим на оставшееся отрицательное число, то полученное произведение будет отрицательным.

Итак, когда отрицательных сомножителей нечётное число, то произведение будет отрицательным числом.

Отсюда следует, что для определения знака произведения нам достаточно знать, имеет ли данное выражение чётное или нечётное число отрицательных сомножителей.

Таким образом, получаем следующее правило для умножения нескольких чисел.

Правило. ***Произведение нескольких чисел равно произведению абсолютных величин всех сомножителей, взятому со знаком плюс, если число отрицательных сомножителей чётное (или их нет совсем), и со знаком минус, если число отрицательных сомножителей нечётное.***

В приведённом выше примере три отрицательных сомножителя, значит, произведение надо взять со знаком минус.

§ 23. Свойства умножения.

Напомним свойства умножения, которые остаются справедливыми и для любых рациональных чисел.

1. Умножение суммы.

Чтобы умножить сумму на какое-либо число, можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

Пример.

$$[(+7)+(-3)+(+2)]\cdot(-3)=(+6)\cdot(-3)=-18 \text{ и}$$
$$(+7)\cdot(-3)+(-3)\cdot(-3)+(+2)\cdot(-3)=(-21)+(+9)+(-6)=-18.$$

2. Умножение на сумму.

Чтобы умножить на сумму, можно умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

Пример.

$$(+8)\cdot[(-2)+(+7)+(-3)]=(+8)\cdot(+2)=16 \text{ и}$$
$$(+8)\cdot(-2)+(+8)\cdot(+7)+(+8)\cdot(-3)=(-16)+(+56)+(-24)=16.$$

Оба эти свойства вытекают из распределительного закона.

3. Умножение произведения.

Чтобы умножить произведение на число, можно умножить на это число один из сомножителей, оставив остальные без изменения.

Пример.

$$[4\cdot(-3)\cdot5]\cdot(-2)=(-60)\cdot(-2)=120$$
$$\text{и } [4\cdot(-2)]\cdot(-3)\cdot5=(-8)\cdot(-3)\cdot5=120.$$

4. Умножение на произведение.

Чтобы умножить на произведение, можно умножить на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и так далее до конца.

Пример.

$$4\cdot[5\cdot(-2)\cdot3]=4\cdot(-30)=-120$$
$$\text{и } (4\cdot5)\cdot(-2)\cdot3=20\cdot(-2)\cdot3=(-40)\cdot3=-120.$$

Третье и четвёртое свойства вытекают из сочетательного закона.

§ 24. Возведение в степень.

Степень любого рационального числа определим так же, как и степень положительного числа (§ 5). Именно, положим:

$$a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}},$$

где a — любое рациональное число, а n — натуральное число.

Рассмотрим возведение в степень отрицательных чисел.

Будем возводить в различную степень число —2:

$$(-2)^1 = -2 \text{ (по определению, см. § 5);}$$
$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4;$$
$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8;$$
$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16;$$
$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32 \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что при возведении числа —2 в чётную степень получается положительное число. При возведении же в нечётную степень получается отрицательное число.

Очевидно, что такое же чередование знаков будет и при возведении в степень любого отрицательного числа.

Это и понятно. Чётная степень всякого числа есть произведение чётного числа сомножителей. А чётное число отрицательных сомножителей даёт в произведении положительное число (§ 22).

И наоборот, нечётная степень отрицательного числа, как произведение нечётного числа отрицательных сомножителей, будет отрицательным числом.

Итак, сделаем следующий вывод.

Чётная степень отрицательного числа положительна, нечётная степень отрицательна.

§ 25. Деление.

Деление определяется как действие, обратное умножению.

Разделить одно число на другое — значит найти такое третье число, которое, будучи умножено на делитель, даст в произведении делимое.

$a:b = c$, если $bc = a$.

Основываясь на этом определении, выведем правило деления для рациональных чисел.

Прежде всего условимся раз навсегда, что делитель не может быть нулём. Деление на нуль исключается по той же причине, по которой оно было исключено в арифметике.

Абсолютная величина a равна произведению абсолютных величин b и c. Значит, абсолютная величина c равна абсолютной величине a, делённой на абсолютную величину b.

Определим знак частного c.

Если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, то частное — положительное число.

Действительно, если a и b положительны, то частное c тоже будет положительным числом.

Пример. $12:4=3$, так как $4\cdot3=12$.

Если a и b отрицательны, то частное c и в этом случае должно быть положительным, так как, умножив на него отрицательное число b, мы должны получить отрицательное число a.

Пример. $-12:(-4)=3$, так как $(-4)\cdot3=-12$.

Если делимое и делитель имеют разные знаки, то частное — отрицательное число.

Действительно, если a положительно, а b отрицательно, то c должно быть отрицательным, так как, умножив на него отрицательное число b, мы должны получить положительное число a.

Пример. $12:(-4)=-3$, так как $(-4)\cdot(-3)=12$.

Если a отрицательно, а b положительно, то и в этом случае c должно быть отрицательным числом, так как, умножив на него положительное число b, мы должны получить отрицательное число a.

Пример. $(-12):4=-3$, так как $4\cdot(-3)=-12$.

Итак, мы пришли к следующему правилу деления.

Правило. ***Чтобы разделить одно число на другое, надо абсолютную величину делимого разделить на абсолютную величину делителя и перед частным поставить знак плюс, если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, и знак минус, если делимое и делитель имеют противоположные знаки.***

Докажем, что для рациональных чисел остаётся верным следующая теорема.

Теорема. ***Частное двух рациональных чисел не изменится, если делимое и делитель умножить на одно и то же число (не равное нулю).***

Дано: $a:b=c$. (1)

Требуется доказать: $am:bm=c$, (2)

где m — любое, не равное нулю, рациональное число.

Доказательство. Равенство (2) верно, если частное c, будучи умножено на делитель bm, даст делимое am. Проверим это.

На основании сочетательного закона умножения имеем:

$$c(bm) = (cb)m. \qquad (3)$$

Но из раьенства (1) по определению деления следует: $cb = a$.

Заменяя в равенстве (3) число cb равным ему числом a, получим:

$$c(bm) = am.$$

Но это как раз делимое в равенстве (2). Значит, равенство (2) верно, и теорема доказана.

§ 26. Свойства деления.

1. Деление суммы.

Чтобы разделить сумму на число, можно разделить на это число каждое слагаемое и результаты сложить.

Пример.

$$[12 + (-28) + 32]:4 = 16:4 = 4$$

$$\text{и } 12:4 + (-28):4 + 32:4 = 3 + (-7) + 8 = 4.$$

2. Деление произведения.

Чтобы разделить произведение на число, можно разделить на это число любой из сомножителей, оставив остальные без изменения.

Пример.

$$[12\cdot(-18)\cdot 30]:6 = (-6480):6 = -1080$$

$$\text{и } (12:6)\cdot(-18)\cdot 30 = 2\cdot(-18)\cdot 30 = -1080$$

$$12\cdot[(-18):6]\cdot 30 = 12\cdot(-3)\cdot 30 = -1080$$

$$12\cdot(-18)(30:6) = 12\cdot(-18)\cdot 5 = -1080$$

3. Деление на произведение.

Чтобы разделить на произведение, можно разделить на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и так далее до конца.

Пример.

$$120:[2\cdot(-3)\cdot 5] = 120:(-30) = -4$$

$$\text{и } 120:2:[(-3)\cdot 5] = 60:[(-3)\cdot 5] = -20:5 = -4.$$

§ 27. Графики.

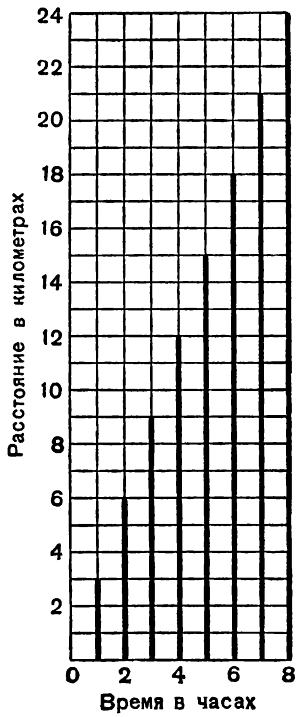
1. График равномерного движения. Решим задачу. *Пионеры в походе шли со скоростью 3 км в час. Какое расстояние они прошли за t часов?*

Если искомое расстояние обозначим через s, то получим:

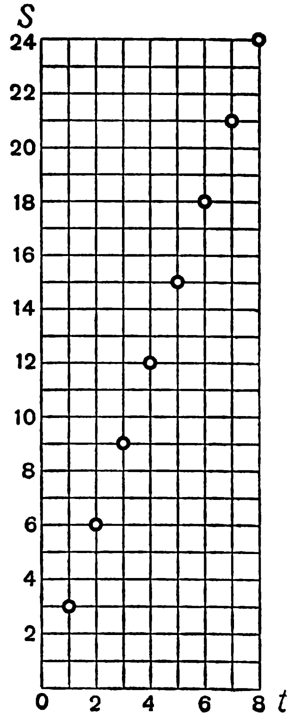
$$s = 3t.$$

Давая t значения 1, 2, 3, $3\frac{1}{2}$ и т. д., найдем значения s, то есть расстояние, пройденное за 1 час, 2 часа, 3 часа и т. д.

С помощью отрезков можно наглядно представить расстояния, пройденные за различные промежутки времени. На чертеже 12 проведены из одной точки O два взаимно перпендикулярных луча, которые назовём горизонтальной и вертикальной осями. На горизонтальной оси отметим в часах время движения,



Черт. 12.

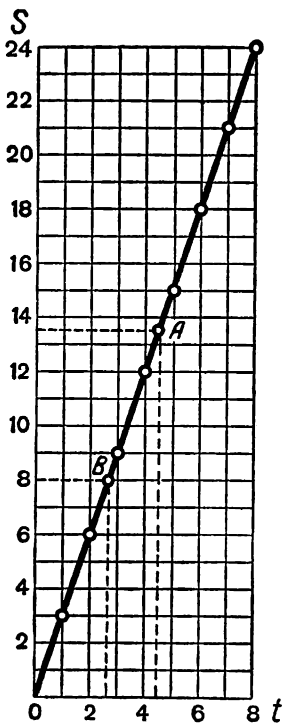


Черт. 13.

выбрав некоторый отрезок (например, размер одной клетки), соответствующий одному часу. На вертикальной оси отметим расстояние в километрах (1 *км* — размер одной клетки). Перпендикуляры, проведённые к горизонтальной оси из любой её точки, покажут расстояние, пройденное за указанный внизу промежуток времени. Величину этого расстояния можно определить, проведя из верхнего конца перпендикуляр к вертикальной оси.

Так как нас интересует только длина каждого перпендикуляра, то можно чертёж упростить, оставив только точки — верхние концы этих перпендикуляров (черт. 13).

Легко видеть, что все эти точки расположены на одной прямой. Если будем брать более мелкие промежутки времени, то новые точки расположатся на той же прямой между уже полученными точками. Проведём эту прямую (черт. 14).



Черт. 14.

Полученная прямая является графиком равномерного движения со скоростью 3 *км* в час.

Перпендикуляр, проведённый к горизонтальной оси из любой точки графика, покажет расстояние, пройденное за время, которое указывает основание перпендикуляра.

По этому графику можно определить расстояние, пройденное за любой промежуток времени.

Пусть, например, мы хотим определить расстояние, пройденное за $4\frac{1}{2}$ часа. Найдя на горизонтальной оси точку $4\frac{1}{2}$, проведём к ней перпендикуляр до пересечения с графиком в точке A. Этот перпендикуляр изображает расстояние, пройденное за $4\frac{1}{2}$ часа. Величину этого расстояния $\left(13\frac{1}{2}\ \textit{км}\right)$ можно определить по отметкам на вертикальной оси.

По этому же графику можно решить и обратную задачу: определить — за какое время будет пройдено некоторое расстояние, например 8 *км*.

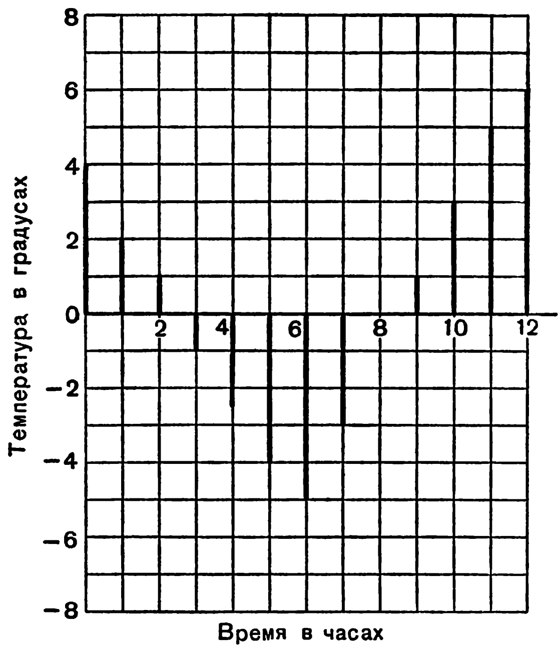
Из точки 8 на вертикальной оси проведём к ней перпендикуляр до пересечения с графиком в точке B. Из этой точки опустим перпендикуляр на горизонтальную ось. Нижний конец этого перпендикуляра и покажет время (приблизительно 2,7 часа), за которое был пройден путь 8 *км*.

2. График температуры. Следующая таблица показывает изменение температуры воздуха в один из ноябрьских дней с 12 часов ночи до 12 часов дня.

Нулём обозначен момент начала измерения, то есть 12 часов ночи.

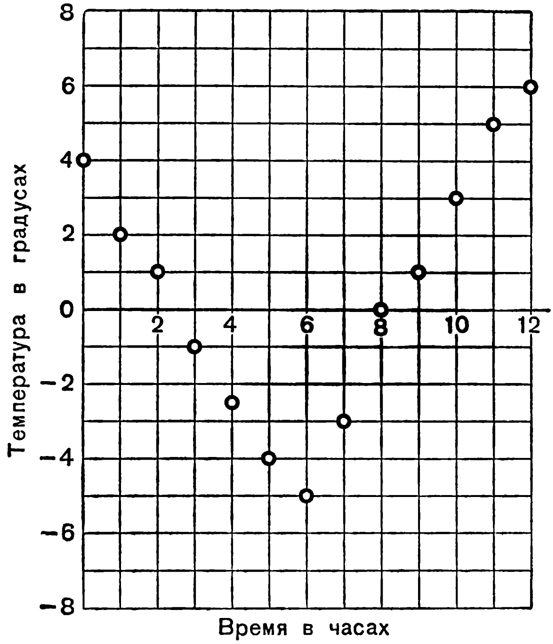
Время в часах	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура в градусах	4	2	1	-1	$-2\frac{1}{2}$	-4	-5	-3	0	1	3	5	6

Эту таблицу также можно изобразить графически, откладывая в определённом масштабе на горизонтальной оси время в часах. Концы перпендикуляров, проведённых из точек на горизонтальной оси, покажут (тоже в определённом масштабе) соответствующую температуру (число градусов).

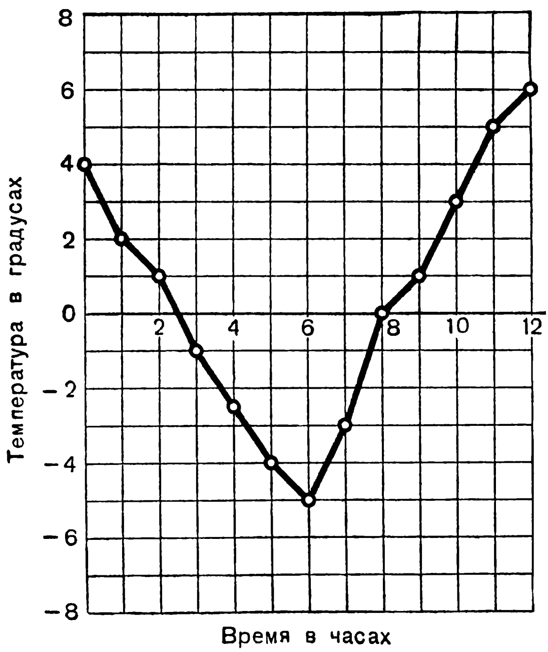


Черт. 15.

Но в таблице температур стоят не только положительные, но и отрицательные числа. Как отметить их на графике? Если величину, например 4°, мы изображали перпендикуляром, проведённым вверх от горизонтальной оси, то число —4° естественно изобразить перпендикуляром, проведённым вниз от этой оси. Значит, вертикальную ось мы должны продолжить вниз для отсчёта температур ниже нуля (черт. 15).



Черт. 16.



Черт. 17.

И здесь можно вместо перпендикуляров оставить только их концы (черт. 16). Если соединим последовательно эти точки отрезками прямых, то получим г р а ф и к т е м п е р а т у р ы (черт. 17), по которому можно приблизительно определить температуру воздуха в любой момент от 12 час. ночи до 12 час. дня.

§ 28. Решение уравнений и задач.

Решим уравнение:

$$x+17=11.$$

На основании зависимости между слагаемыми и суммой можем записать:

$$x=11-17.$$

До введения отрицательных чисел мы сказали бы, что данное уравнение не имеет решений, так как в правой части уравнения получили выражение, не имеющее смысла. Теперь же, после введения отрицательных чисел, на основании правила вычитания (§ 17) получим:

$$x=-6.$$

Проверим найденное решение подстановкой $x=-6$ в данное уравнение. Получим:

$$-6+17=11.$$

Значит, решение найдено верно.

Ещё пример:

$$5x+14=6.$$

Находим $5x$ как неизвестное слагаемое:

$$5x=6-14; \quad 5x=-8.$$

Теперь находим x как неизвестный сомножитель:

$$x=-8:5=-\frac{8}{5}=-1{,}6; \; x=-1{,}6.$$

П р о в е р к а. $5\cdot(-1{,}6)+14=-8+14=6.$

Значит, $x=-1{,}6$ есть корень уравнения.

Возникает вопрос: что будет означать отрицательное число, если оно получится в результате решения задачи?

Рассмотрим несколько задач.

З а д а ч а 1. *Я задумал число. Когда прибавил к нему* 27 *и результат разделил на* 6, *то получил* 3. *Какое число я задумал?*

1) Обозначим задуманное число через x.

2) Прибавим к нему 27, получим $x+27$.

3) Разделив результат на 6, получим $\frac{x+27}{6}$.

4) По условию задачи в итоге должно получиться 3. Значит:

$$\frac{x+27}{6}=3.$$

5) Решим это уравнение. Найдём $x+27$ как неизвестное делимое:

$$x+27=18.$$

Теперь найдём x как неизвестное слагаемое:

$$x=18-27; \quad x=-9.$$

6) Проверим подстановкой:

$$\frac{-9+27}{6}=\frac{18}{6}=3.$$

Итак, здесь число -9 является ответом на вопрос задачи. Я действительно задумал число -9, произвёл над ним указанные действия и получил 3. Отрицательные числа здесь являются допустимыми значениями для неизвестного.

Задача 2. *Ученик купил тетрадь за* 70 *коп. и несколько карандашей по* 10 *коп. за карандаш. Сколько карандашей он купил, если заплатил за всю покупку* 50 *коп.?*

1) Обозначим число купленных карандашей через x.
2) Тогда все карандаши стоят $10x$ копеек.
3) Карандаши и тетрадь вместе стоят $(10x+70)$ копеек.
4) По условию задачи:

$$10x+70=50.$$

5) Решаем уравнение:

$$10x=-20; \quad x=-2.$$

Но нельзя купить „минус два карандаша". Число карандашей не может быть отрицательным. Отрицательные значения не являются допустимыми для неизвестного. Значит, полученное отрицательное число показывает, что задача не имеет решения. Это и понятно: нельзя за карандаши и тетрадь заплатить меньше, чем за одну тетрадь.

Задача 3. *Автомобиль идет из города со скоростью* 60 *км в час. В настоящий момент он находится от города в* 240 *км. Через сколько часов автомобиль будет на расстоянии* 120 *км от города?*

Решая подобно предыдущей задаче, получим:

$$60x + 240 = 120; \quad 60x = -120; \quad x = -2.$$

Можно сделать вывод, что и здесь отрицательный ответ указывает на отсутствие решения. Действительно, если автомобиль находится в данный момент в 240 *км* от города и продолжает удаляться от него, то никогда не наступит такой момент, когда автомобиль будет находиться в 120 *км* от города.

Но можно подойти к полученному ответу и по-другому. Условимся, как и раньше (§ 10), время, отсчитываемое от момента, когда автомобиль находился в 240 *км* от города, обозначать положительным числом, если речь идёт о будущем времени, и отрицательным, если речь идёт о прошедшем времени.

При этом условии для неизвестного будут допустимыми как положительные, так и отрицательные значения и полученный ответ -2 приобретает определённый смысл: он означает „2 часа назад". Действительно, 2 часа назад автомобиль находился от города на расстоянии $240 - 60 \cdot 2 = 120$ (*км*).

Итак, отрицательные значения неизвестного, полученные в результате решения задачи, или дают определённый ответ на вопрос задачи, или указывают на отсутствие решения в зависимости от того, являются ли отрицательные значения допустимыми для неизвестного или нет.

§ 29. Краткие исторические сведения.

(Из истории отрицательных чисел.)

Еще несколько тысяч лет назад потребности в измерении привели к расширению множества натуральных чисел, которыми до тех пор пользовались люди. Были введены новые, дробные числа, с помощью которых стало возможно производить измерения (длин, площадей, веса и пр.) с любой степенью точности, допускаемой инструментами.

Не так обстояло дело с отрицательными числами. В практической деятельности людей не ощущалась потребность во введении отрицательных чисел, и они прочно вошли в математику и получили применение лишь в XVII веке.

Но в самой математике потребность в расширении числового множества путём введения новых отрицательных чисел ощущалась уже давно, и по мере развития математической науки эта потребность становилась всё более настоятельной.

Так, ещё в III веке греческий математик Диофант при выполнении некоторых преобразований, например:

$$(2x - 3)(2x - 3) = 4x^2 - 12x + 9$$

фактически уже пользовался правилом умножения отрицательных чисел, которое он выражал так: „Отнимаемое, умноженное на прибавляемое, даёт в результате отнимаемое. Отнимаемое, умноженное на отнимаемое, даёт в результате прибавляемое“.

Из этой формулировки видно, что Диофант ещё не признавал самостоятельного существования отрицательных чисел; для него они были прежними числами, „отнимаемыми“ от какого-либо другого числа. Поэтому, если, например, при решении уравнения получался отрицательный корень, Диофант его просто отбрасывал, как „недопустимый“.

Но уже индийский учёный Брамагупта (VII век) в своих вычислениях свободно пользовался отрицательными числами и давал им наглядное истолкование. Он обозначал имущество положительными числами, а долг отрицательными.

В этой наглядной форме он давал и правила действий с рациональными числами, например: „Сумма двух имуществ — имущество. Сумма двух долгов — долг. Сумма имущества и долга равна их разности, а если они равны, то нулю. Долг, будучи вычтен из нуля, делается имуществом“ и т. д.

Индийский же математик Бхаскара (XII век) пользуется степенью отрицательного числа. В его сочинении „Венец системы“ говорится:

„Квадрат как положительного, так и отрицательного числа даёт положительное число, например:

$$(+5)^2 = 25 \quad \text{и} \quad (-5)^2 = 25\text{“}.$$

В Европе математики XVI века, хотя и пользовались иногда отрицательными числами, всё же называли их „ложными“ и „неясными“, „меньшими, чем ничто“ и т. п.

Лишь голландский математик Жирар (XVI—XVII века) пользуется отрицательными числами наравне с положительными. Так, решая уравнение:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

он приводит три его корня:

$$x_1 = +3; \; x_2 = +1; \quad x_3 = -2.$$

Бурное развитие естествознания и техники в XVII веке предъявляло повышенные требования и к математике, требовало её дальнейшего развития и усовершенствования математического аппарата. Неприменение отрицательных чисел создавало излишние трудности в математических вычислениях и преобразованиях. Начиная с XVII века отрицательные числа прочно входят в математику и находят практические применения. Французский философ и математик Декарт даёт наглядное истолкование чисел с помощью точек числовой оси. Он пользуется отрицательными числами для графического изображения различных процессов и алгебраических выражений.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ.

§ 30. Одночлен и многочлен.

1. Рациональные алгебраические выражения. В предыдущих главах рассматривались пять действий над рациональными числами. Эти действия: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень.

В настоящей главе будем рассматривать алгебраические выражения, составленные с помощью этих пяти действий. Все такие выражения называются рациональными.

Определение 1. **Алгебраические выражения, составленные из цифр и букв с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, называются рациональными.**

Примеры рациональных выражений:

$$a+b; \quad a^2b; \quad \frac{x}{y}; \quad \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}; \quad 0,25;$$

$$a; \quad \frac{x+xy-y^2}{a-b}; \quad a+\frac{2}{b}; \quad \frac{4}{a-\frac{b}{a}}.$$

2. Целые и дробные алгебраические выражения. Рассмотрим следующие рациональные выражения:

$$a^2-0,3ab+1; \qquad \frac{5x}{4}; \qquad a+\frac{2}{b}.$$

В первое из этих выражений совсем не входит действие деления. Такие выражения называются целыми.

Во второе выражение входит действие деления на 4. Но мы можем этот делитель отнести к коэффициенту (см. § 26, второе свойство деления) и, разделив на него коэффициент, представить выражение в таком виде: $\frac{5}{4}x$, или $1,25x$.

В это выражение действие деления уже не входит. Поэтому такие выражения, в которые входит деление на число, выраженное цифрами, мы тоже будем считать целыми (они записаны в виде дробного выражения подобно тому, как в арифметике целое число, например 3, можно записать в виде дробного: $\frac{6}{2}$, $\frac{15}{5}$ и т. п.).

Выражение

$$\frac{3x^2-4x+5}{2}$$

является целым, так как его можно представить в таком виде:

$$1{,}5x^2-2x+2\frac{1}{2}.$$

Здесь действие деления не входит в это выражение.

Наконец, в третье выражение входит деление на число, выраженное буквой. (Говорят также, что это выражение имеет буквенный делитель.) Здесь мы не можем представить выражение в таком виде, чтобы оно не содержало деления. Такие выражения называются **дробными**.

Ещё примеры дробных выражений:

$$\frac{x}{y+1};\quad \frac{a+c}{4a};\quad \frac{m+1}{m-1};\quad 4+\frac{3}{5b}.$$

Определение 2. **Рациональное алгебраическое выражение называется целым, если оно не содержит деления на буквенное выражение.**

Определение 3. **Рациональное алгебраическое выражение называется дробным, если оно содержит деление на буквенное выражение.**

Можно короче сказать: рациональное алгебраическое выражение называется целым или дробным смотря по тому, имеет или не имеет оно буквенного делителя.

3. Одночлен. Из целых выражений наиболее простыми считаются такие, в которые входят только действия умножения и возведения в степень, например:

$$2a;\quad 3a^2b;\quad \frac{4}{5}x^2y^2;\quad ab^2c^3;\quad -0{,}2^3.$$

Такие выражения называются **одночленами**.

Определение 4. **Алгебраическое выражение, которое содержит только действия умножения и возведения в степень, называется одночленом.**

Таким образом, одночлен представляет собой произведение числового множителя — коэффициента и букв, каждая из которых взята в определённой степени.

Примечание. Если возведение в степень считать частным случаем умножения (мы можем, например, a^3 записать так: aaa), то можно сказать, что одночлен содержит только одно действие — умножение.

В частности, выражение, состоящее только из одной буквы (подразумевается коэффициент единица), является одночленом. Одночленом считается и всякое отдельное число, записанное цифрами.

Выражение вида $\frac{3a^2b}{4}$ тоже считается одночленом, так как хотя в него и входит деление, но делитель 4 мы можем отнести к коэффициенту и записать выражение так:

$$\frac{3}{4}a^2b \text{ или } 0{,}75a^2b.$$

4. Многочлен. Несколько одночленов, соединённых знаками сложения и вычитания, образуют новое алгебраическое выражение, которое называется многочленом.

Например:

$$3x^2 - 5xy + 6y^2 - 8.$$

Мы уже знаем, что всегда вычитание можно заменить сложением и всякое выражение, в которое входят сложение и вычитание, представить в виде алгебраической суммы. Например, приведённое выше выражение можно записать так:

$$3x^2 + (-5xy) + 6y^2 + (-8).$$

Поэтому многочлен мы можем определить так.

Определение 5. **Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется многочленом.**

Каждый одночлен, входящий в состав многочлена, называется его членом.

Многочлен, состоящий из двух членов, называется также двучленом; многочлен, состоящий из трёх членов, называется трёхчленом и т. д.

Примеры двучленов:

$$x^2 + 1; \quad a + b; \quad 3a^2b - 4b^2c.$$

Примеры трёхчленов:

$$x^2 + x + 1; \quad 3y^3 - 4ay^2 + 4.$$

В частности, мы можем и одночлен рассматривать как частный случай многочлена: это многочлен, состоящий из одного члена.

Такие выражения, как, например:

$$(x + y)b; \quad 2(a^2 + 3b^2) - 6b^2; \quad m(m + n) - m^2,$$

не являются ни одночленами, ни многочленами. Но, изучив действия над одночленами и многочленами (сложение, вычитание, умножение), мы сможем любое целое алгебраическое выражение представить в виде одночлена или многочлена.

5. Расположенные многочлены. Пусть многочлен содержит одну только букву в различных степенях, например:

$$8a - 3a^3 + 5a^4 - 1. \qquad (1)$$

Пользуясь переместительным законом сложения, мы можем расположить его члены по убывающим степеням буквы a:

$$5a^4 - 3a^3 + 8a - 1. \qquad (2)$$

Тот же многочлен (1), расположенный по возрастающим степеням буквы a, примет вид:

$$-1 + 8a - 3a^3 + 5a^4. \qquad (3)$$

В дальнейшем мы будем говорить только о многочленах, расположенных по убывающим степеням какой-либо буквы.

Если многочлен содержит две или несколько букв, то выбирают одну из них, которую называют главной, и располагают многочлен по степеням этой главной буквы. Например, выражение

$$3x^3 - 2ax^2 + a^4x - 5a^2 \qquad (4)$$

является многочленом, расположенным по убывающим степеням буквы x.

Первый член расположенного многочлена, содержащий главную букву в наивысшей степени, называется старшим, а последний — низшим членом этого многочлена. Степень старшего члена называется степенью и самого многочлена.

Многочлен (2) — четвёртой, а (4) — третьей степени относительно главной буквы. Если низший член совсем не содержит главной буквы, то он называется свободным членом. В многочленах (2) и (4) — 1 и $-5a^2$ — свободные члены.

Заметим, что если в многочлене (в частности, в одночлене) выбрана главная буква, то в каждом члене всё остальное выражение считается коэффициентом при этой букве. Так, в многочлене (4) выражение $-2a$ — коэффициент при x^2, выражение a^4 — коэффициент при x в первой степени. Значит, здесь мы расширяем понятие о коэффициенте, данное в § 4; коэффициентом может быть уже не только число, записанное цифрами, но и буквенное выражение.

Так, в одночлене $4ab$ выражение $4a$ — коэффициент при b, а $4b$ — коэффициент при a (в этом случае лучше записать $4ba$)

§ 31. Тождества и тождественные преобразования.

Пусть даны два алгебраических выражения:

$$1)\ 2(x+5)-4 \text{ и } 2)\ 2x+6.$$

Составим таблицу значений каждого из этих выражений при различных числовых значениях буквы x.

Получим:

x	-7	-5	-3	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	5	7	20	50
$2(x+5)-4$	-8	-4	0	2	4	6	8	9	16	20	46	106
$2x+6$	-8	-4	0	2	4	6	8	9	16	20	46	106

Мы видим, что при любом значении, которое давалось букве x, значения обоих выражений оказывались равными. То же будет и при всяком другом значении x.

Чтобы убедиться в этом, преобразуем первое выражение. На основании распределительного закона запишем:

$$2(x+5)-4=2x+2\cdot5-4.$$

Произведя над числами указанные действия, получим:

$$2x+10-4=2x+6.$$

Итак, выражение первое после его упрощения оказалось совершенно таким же, как и выражение второе.

Теперь ясно, что при любом значении x значение обоих выражений будет одно и то же.

Выражения, значения которых равны при любых значениях входящих в них букв, называются тождественно равными, или просто **тождественными**.

Значит, $2(x+5)-4$ и $2x+6$ — тождественные выражения.

Сделаем одно важное замечание. Возьмём выражения:

$$1)\ \frac{x^2-9}{x-3} \text{ и } 2)\ x+3.$$

Составив таблицу, подобную предыдущей, убедимся, что оба выражения при любом значении x, кроме $x=3$, имеют равные числовые значения. Только при $x=3$ второе выражение равно 6, а первое теряет смысл, так как в знаменателе получается нуль. (Вспомним, что на нуль делить нельзя.) Можно ли сказать, что эти выражения тождественны?

Мы раньше условились, что каждое выражение будем рассматривать только при допустимых значениях букв, то есть при тех значениях, при которых выражение не теряет смысла. Значит, и здесь, сравнивая два выражения, принимаем во внимание только те значения букв, которые допустимы для обоих выражений. Поэтому значение $x=3$ мы должны исключить. А так как при всех остальных значениях x оба выражения имеют одно и то же числовое значение, то мы вправе считать их тождественными.

На основании сказанного можно дать теперь такое определение тождественных выражений.

Определение 1. **Выражения называются тождественными, если они имеют одинаковые числовые значения при всех допустимых значениях входящих в них букв.**

Если два тождественных выражения соединим знаком равенства, то получим тождество. Значит:

Определение 2. **Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв.**

Мы уже раньше встречались с тождествами. Так, например, тождествами являются все равенства, которыми мы выражали основные законы сложения и умножения.

Переместительный закон сложения:

$$a+b=b+a.$$

Сочетательный закон умножения:

$$a(bc)=(ab)c.$$

Эти равенства справедливы для любых значений букв. Значит, они являются тождествами.

Тождествами считаются также все верные арифметические равенства, например:

$$2+5=7; \quad 3\cdot5\cdot6=90; \quad (3+6)\cdot7=63.$$

В алгебре часто приходится какое-либо выражение заменять другим, ему тождественным. Пусть, например, требуется найти значение выражения

$$37a+36a+27a$$

при $a=6{,}53$.

Мы значительно облегчим вычисления, если данное выражение заменим ему тождественным. На основании распределительного закона можем записать:

$$37a+36a+27a=(37+36+27)\,a.$$

Но числа в скобках дают в сумме 100. Значит, имеем тождество:

$$37a+36a+27a=100\,a.$$

Подставив в правую часть его 6,53 вместо a, сразу, в уме, найдем числовую величину 653 данного выражения.

Определение 3. **Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется тождественным преобразованием этого выражения.**

Напомним, что всякое алгебраическое выражение при любых допустимых значениях букв является некоторым числом. А отсюда следует, что к алгебраическим выражениям применимы все законы и свойства арифметических действий, которые были приведены в предыдущей главе. Поэтому в дальнейшем, производя преобразования алгебраических выражений, мы часто будем ссылаться на эти законы и свойства.

Равенство числовых значений двух тождественных алгебраических выражений даёт удобный способ проверки правильности произведённого тождественного преобразования.

Пусть мы преобразовали данное алгебраическое выражение в другое, тождественное данному.

Дадим буквам, входящим в эти выражения, произвольные числовые значения и найдём числовую величину обоих выражений при этих значениях букв.

Если числовые величины обоих выражений окажутся неравными, то это значит, что в преобразовании была допущена ошибка. В этом случае преобразование надо проделать снова.

Если же числовые величины обоих выражений окажутся равными, то с большой вероятностью можно утверждать, что преобразование выполнено правильно.

Но следует отметить, что в этом случае результат проверки не является вполне надёжным. Случайно произвольные значения для букв могут быть взяты такие, что при этих значениях и два нетождественных выражения будут иметь одну и ту же числовую величину. Например, выражения a^2+1 и $3a-1$ имеют оба числовую величину 2 при $a=1$ и 5 при $a=2$. Но эти выражения не тождественны, в чём можно убедиться, подставив вместо a любое другое число (например, $a=0$).

§ 32. Приведение подобных членов.

Задача 1. *Тетрадь стоит а копеек. Коля купил 3 тетради, Вера 7, а Вася 5 тетрадей. 1) Сколько заплатил каждый? 2) Сколько стоили все купленные тетради?*

Ответом на первый вопрос будут выражения:

$$3a;\ 7a;\ 5a \text{ копеек.} \tag{1}$$

Ответом на второй вопрос будет сумма этих выражений:

$$(3a+7a+5a) \text{ копеек.} \tag{2}$$

Это последнее выражение можем упростить. На основании распределительного закона запишем:

$$3a+7a+5a=(3+7+5)\,a=15a.$$

Выражение (2) мы заменили тождественным ему выражением $15a$. При любом значении a значение выражения $15a$ вычисляется быстрее и легче, чем значение выражения (2).

Определение 1. **Одинаковые или отличающиеся только коэффициентами члены многочлена называются подобными.**

В равенстве $3a+7a+5a=15a$ алгебраическая сумма подобных членов заменена одним членом, тождественным этой сумме.

Определение 2. **Замена алгебраической суммы подобных членов одним членом, тождественным этой сумме, называется приведением подобных членов.**

Чтобы привести подобные члены, надо сложить их коэффициенты и к полученной сумме приписать то же буквенное выражение.

Пример.

$$3a^2b-a^2b+7{,}4a^2b=(3-1+7{,}4)\,a^2b=9{,}4a^2b.$$

(Проверить подстановкой: $a=2$; $b=5$.)

В дальнейшем, говоря о многочлене, будем предполагать, что в нём сделано приведение подобных членов (если они были).

§ 33. Сложение одночленов и многочленов.

1. Сложение одночленов. Пусть требуется сложить одночлены:

$$13x^2;\ -8x;\ 4x^3;\ -5;\ -3x.$$

Получим:

$$13x^3+(-8x)+(+4x^3)+(-5)+(-3x).$$

Полученное выражение является алгебраической суммой. Согласно введённому условию (§ 19), мы можем знак сложения везде опустить и написать короче:

$$13x^2-8x+4x^3-5-3x.$$

В этом выражении имеются два подобных члена.

Приведём их и заодно расположим многочлен по убывающим степеням относительно x.

Получим:

$$4x^3+13x^2-11x-5.$$

(Проверить подстановкой в данные одночлены и в полученную сумму значений: 1) $x=1$; 2) $x=-2$.)

Значит, мы можем вывести такое правило.

Правило. ***Чтобы сложить одночлены, достаточно записать их один за другим с их знаками.***

Если в полученном выражении окажутся подобные члены, то их надо привести.

2. Сложение многочленов. Решим задачу.

В одной корзине было x яблок, в другой на y яблок больше, чем в первой, а в третьей на 27 яблок меньше, чем во второй. Сколько яблок было во всех трёх корзинах?

Решение.

1) В первой корзине было x яблок.
2) Во второй корзине было $(x+y)$ яблок.
3) В третьей корзине было $(x+y-27)$ яблок.
4) Во всех трёх корзинах было $x+(x+y)+(x+y-27)$ яблок.

Полученный ответ представляет собой сумму одночлена и двух многочленов.

Упростим этот ответ.

Мы знаем, что выражение $x+y-27$ можно рассматривать как алгебраическую сумму. Поэтому по правилу прибавления суммы можем записать:

$$x+(x+y)+(x+y-27)=x+x+y+x+y-27.$$

После приведения подобных членов получим окончательно:

$$3x+2y-27.$$

(Определить, сколько было яблок в корзинах, если:

1) $x=40$; $y=30$; 2) $x=35$; $y=42$.)

Значит, мы можем вывести такое правило для сложения многочленов.

Правило. ***Чтобы сложить многочлены, надо записать последовательно все их члены с их знаками.***

Если в полученном выражении окажутся подобные члены, их надо привести.

3. Раскрытие скобок. При решении предыдущей задачи пришлось раскрывать скобки, перед каждой из которых стоял знак плюс. Значит, мы можем сделать такой вывод.

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с их знаками.

Примечание. Если выражение начинается со скобки, перед которой нет никакого знака, то подразумевается знак плюс, например: $(a^2-3a+2)+(3a-7)=a^2-3a+2+$ $+3a-7=a^2-5$.

4. Заключение в скобки. Иногда бывает нужно, наоборот, заключить многочлен или часть его в скобки. Возьмем такой пример. Пусть надо вычислить выражение:

$$136+258-238.$$

Очевидно, что здесь выгоднее сначала вычесть 238 из 258 и разность 20 прибавить к 136. Вычисления легко и быстро выполняются в уме. Чтобы показать это, заключим второй и третий члены в скобки:

$$136+(258-238).$$

Скобки показывают (§ 6), что сначала надо произвести вычитание.

Пусть вообще нужно заключить в скобки многочлен или часть его и перед скобкой поставить знак плюс. Будем руководствоваться следующим правилом.

Правило. ***Чтобы заключить многочлен в скобки со знаком плюс перед ними, надо записать в скобках все члены многочлена с их знаками.***

$$a-b+c=+(a-b+c).$$

Убедиться в верности этого равенства легко, раскрыв скобки по правилу, изложенному в п. 3.

5. Противоположные многочлены. Пользуясь правилом сложения, докажем следующую теорему.

Теорема. ***Числовые значения двух многочленов, состоящих из одинаковых членов, но с противоположными знаками, противоположны*** (конечно, при одинаковых значениях букв).

Пусть дан многочлен:

$$a-b+c. \qquad (1)$$

Переменив знаки у всех его членов, получим многочлен:

$$-a+b-c.$$

Высказанное выше положение утверждает, что какие бы числовые значения (одинаковые для обоих многочленов) мы ни давали входящим в них буквам, получим два взаимно противоположных числа.

Докажем это. Сложив оба многочлена, получим:

$$a-b+c-a+b-c.$$

Пользуясь переместительным и сочетательным законами, эту сумму можем записать так:

$$(a-a)+(b-b)+(c-c).$$

Как видим, выражения в каждой скобке равны нулю, а следовательно, и вся сумма равна нулю.

Итак, сумма данных двух многочленов равна нулю. Но это значит (§ 14), что их числовые значения противоположны.

Примечание. Доказанная теорема относится и к одночлену, как к многочлену, имеющему только один член.

Для краткости и сами многочлены, состоящие из одинаковых членов, но с противоположными знаками, будем называть противоположными.

6. Сложение расположенных многочленов. Если многочлены расположены по степеням одной и той же буквы (оба по возрастающим или оба по убывающим), то их сложение удобнее производить следующим образом: подписывают многочлен один под другим так, чтобы подобные члены находились один под другим; после этого сразу делают приведение подобных членов и записывают окончательный результат.

Пример 1.

$$+\begin{array}{r}3x^4-7x^3+x^2-11x-5\\2x^4-4x^3+14x+2\\\hline5x^4-11x^3+x^2+3x-3\end{array}$$

Так же производится сложение расположенных многочленов и тогда, когда они содержат более одной буквы.

Пример 2.

$$+\begin{array}{r}3a^3-5a^2b+7ab^2+b^3\\-5a^3-6ab^2+4b^3\\\hline-2a^3-5a^2b+ab^2+5b^2\end{array}$$

§ 34. Вычитание одночленов и многочленов.

1. Вычитание одночленов. Пусть из одночлена $5a^2b$ требуется вычесть одночлен $3ab^2$. Запишем:

$$5a^2b-(+3ab^2).$$

Из предыдущего параграфа 33 следует, что одночлены $3ab^2$ и $-3ab^2$ являются противоположными, то есть имеют противоположные числовые значения при любых значениях a и b.

Но мы знаем, что вычитание любого числа можно заменить прибавлением числа, противоположного вычитаемому.

Значит:

$$5a^2b-(+3ab^2)=5a^2b+(-3ab^2).$$

По правилу сложения одночленов получим:

$$5a^2b+(-3ab^2)=5a^2b-3ab^2.$$

Итак, имеем:

$$5a^2b-(+3ab^2)=5a^2b-3ab^2.$$

Проверим сложением разности с вычитаемым:

$$5a^2b-3ab^2+(+3ab^2)=5a^2b.$$

Получили уменьшаемое. Значит, вычитание произведено верно. Отсюда выводим такое правило.

Правило. ***Чтобы вычесть одночлен, достаточно приписать его с противоположным знаком к уменьшаемому. Если в полученном выражении окажутся подобные члены, их надо привести.***

2. Вычитание многочленов. Пусть требуется из многочлена $5x^2-3xy+y^2$ вычесть многочлен $6x^2-8xy+y^3$. Запишем:

$$(5x^2-3xy+y^2)-(6x^2-8xy+y^3).$$

Вычитаемый многочлен при любых значениях букв равен некоторому числу, а вычитание числа мы можем заменить прибавлением числа, ему противоположного. Для многочлена $6x^2-8xy+y^3$ противоположное число даёт многочлен $-6x^2+8xy-y^3$ (§ 33). Значит:

$$\begin{aligned}&(5x^2-3xy+y^2)-(6x^2-8xy+y^3)=\\&=(5x^2-3xy+y^2)+(-6x^2+8xy-y^3)=\\&=5x^2-3xy+y^2-6x^2+8xy-y^3=\\&=-x^2+5xy+y^2-y^3.\end{aligned}$$

Проверим сложением:

$$\begin{aligned}&(-x^2+5xy+y^2-y^3)+(6x^2-8xy+y^3)=\\&=-x^2+5xy+y^2-y^3+6x^2-8xy+y^3=\\&=5x^2-3xy+y^2.\end{aligned}$$

Получили уменьшаемое. Отсюда выведем правило.

Правило. ***Чтобы вычесть многочлен, достаточно приписать к уменьшаемому все члены вычитаемого с противоположными знаками.***

Если в полученном выражении окажутся подобные члены, их надо привести.

3. Раскрытие скобок. Из правила вычитания многочленов можно вывести следствие.

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак минус, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с противоположными знаками.

$$-(a-b+c)=-a+b-c.$$

4. Заключение в скобки. Иногда бывает нужно заключить многочлен или его часть в скобки, поставив перед скобкой знак минус. Будем руководствоваться следующим правилом.

Правило. ***Чтобы заключить многочлен в скобки со знаком минус перед ними, надо записать в скобках все члены многочлена с противоположными знаками.***

$$a-b+c=-(-a+b-c).$$

Убедиться в правильности этого равенства легко, раскрыв в правой части скобки по правилу, изложенному в п. 3.

Пример. Вычислить выражение:

$$368-179+149.$$

Заключим второй и третий члены в скобки, поставив перед ними знак минус. Согласно правилу, получим:

$$368-(179-149).$$

Проделав сначала вычитание в скобках, легко произведём в уме все вычисления.

5. Вычитание расположенных многочленов. Вычитание расположенных многочленов выполняется так: у вычитаемого многочлена меняют знаки всех членов на противоположные, подписывают его под уменьшаемым так же, как и при сложении, и делают приведение подобных членов.

Пример.

$$(8x^4-3x^3+7x^2+x-18)-(5x^4-6x^3+3x^2+4x-7).$$

$$+\begin{array}{r}8x^4-3x^3+7x^2+\ x-18\\ -5x^4+6x^3-3x^2-4x+\ 7\\ \hline 3x^4+3x^3+4x^2-3x-11\end{array}$$

§ 35. Умножение одночленов.

1. Умножение степеней одного и того же основания.

Вычислим выражение: $2^3 \cdot 2^2$.

$$2^3 \cdot 2^2=(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5.$$

Итак:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^5.$$

Действительно:

$$2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5.$$

Точно так же:

$$3 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4.$$
$$a^2 \cdot a^4 = aaaaaa = a^6.$$

Мы видим, что показатель в произведении каждый раз равен сумме показателей в сомножителях (в частности, вспомним, что $a = a^1$). Это и понятно: ведь каждый раз основание степени приходится брать сомножителем столько раз, каков показатель в первом сомножителе, и ещё столько раз, каков показатель во втором сомножителе.

В общем виде это правило можно сформулировать так.

Правило. ***Произведение степеней одного и того же числа равно степени того же числа с показателем, равным сумме показателей сомножителей.***

Если буквами m и n обозначить любые целые положительные (натуральные) числа, то это правило можно записать так:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Правило остаётся то же, если перемножаются не два, а три и более сомножителей, например:

$$2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+2+3} = 2^7.$$

В общем виде:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}.$$

2. Умножение одночленов. Пусть требуется перемножить одночлены

$$3a^2b^3c \quad \text{и} \quad 5a^3bc^2d.$$

По правилу умножения на произведение имеем:

$$3a^2b^3c \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b \cdot c^2 \cdot d.$$

Воспользовавшись переместительным и сочетательным законами, можем это произведение записать так:

$$(3 \cdot 5)\,(a^2a^3)\,(b^3b)\,(cc^2)\,d.$$

Произведя умножение в каждой скобке, получим окончательно: $15a^5b^4c^3d$.

Итак:

$$3a^2b^3c \cdot 5a^3bc^2d = 15a^5b^4c^3d.$$

(Проверить подстановкой: $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 5$.)

Если надо перемножить более двух одночленов, то поступаем таким же образом, например:

$$2x^2y\cdot 0{,}5x^3y\cdot 4y^2z^2=(2\cdot 0{,}5\cdot 4)(x^2x^3)(yyy^2)z^2=4x^5y^4z^2.$$

Отсюда можно вывести такое правило.

Правило. ***Чтобы перемножить одночлены, надо перемножить их коэффициенты и к произведению приписать множителем каждую букву из перемножаемых одночленов с показателем, равным сумме показателей этой буквы в сомножителях. Если буква входит только в один из сомножителей, то она записывается с её показателем.***

Пользуясь этим правилом, можно сразу записать произведение, не записывая предварительно группировки сомножителей, как было в приведённых выше примерах.

Пример.

$$7x^2y^2z^3\cdot 2x^3y^2=14x^5y^4z^3.$$

§ 36. Умножение многочлена на одночлен.

Пусть требуется умножить многочлен

$3a^3-5a^2b+6a^2c$ на одночлен $4ab^2$.

Многочлен представляет собой алгебраическую сумму. Поэтому на основании распределительного закона можно записать:

$$(3a^3-5a^2b+6a^2c)\cdot 4ab^2=3a^3\cdot 4ab^2-5a^2b\cdot 4ab^2+6a^2c\cdot 4ab^2.$$

Произведя затем умножение по правилу умножения одночленов, получим:

$$(3a^3-5a^2b+6a^2c)\cdot 4ab^2=12a^4b^2-20a^3b^3+24a^3b^2c.$$

Отсюда выводим правило.

Правило. ***Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.***

§ 37. Умножение многочленов.

Пусть требуется перемножить многочлены:

$$a+b-c \quad \text{и} \quad m-n.$$

Их произведение будет:

$$(a+b-c)(m-n).$$

Нам нужно алгебраическую сумму $a+b-c$ умножить на число $m-n$.

По правилу умножения суммы можем записать:

$$a(m-n)+b(m-n)-c(m-n).$$

Применив распределительный закон, получим:

$$(am-an)+(bm-bn)-(cm-cn).$$

Наконец, раскрыв скобки, получим окончательно:

$$am-an+bm-bn-cm+cn.$$

Итак, имеем:

$$(a+b-c)(m-n)=am-an+bm-bn-cm+cn.$$

Мы видим, что последнее выражение получилось после того, как каждый член множимого $a+b-c$ умножили на каждый член множителя $m-n$.

Отсюда выводим правило.

Правило. ***Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.***

Число членов произведения. Предположим, что в множимом 5 членов, в множителе 3. Умножив все члены множимого на первый член множителя, получим в произведении 5 членов; умножив на второй и третий члены множителя, получим ещё 2 раза по пяти членов. Всего получим 15 членов.

Число членов произведения (до приведения подобных членов) равно числу членов множимого, умноженному на число членов множителя.

Правило умножения многочленов можно применить для упрощения арифметических вычислений.

Например, пусть надо перемножить два числа, у которых число десятков одинаково, а единицы в сумме дают 10, например: 43 и 47; 62 и 68; 103 и 107; 51 и 59.

Обозначим число десятков обоих чисел через a, а число единиц у одного числа через b, у другого — через c. Тогда числа запишутся так: $10a+b$ и $10a+c$.

Перемножим их по правилу умножения многочленов:

$$(10a+b)(10a+c)=100a^2+10ab+10ac+bc=$$
$$=100a^2+10a(b+c)+bc.$$

Но по условию $b+c=10$.

Сделав замену, получим:

$$(10a+b)(10a+c)=100a^2+100a+bc=100a(a+1)+bc.$$

Эта формула позволяет быстро вычислять в уме произведение двух чисел, у которых число десятков одинаково, а сумма единиц равна десяти.

Формула показывает, что для вычисления произведения надо число десятков умножить на число, единицей большее, и к результату приписать произведение единиц, например:

$$\begin{aligned}
43\cdot 47 &= 4\cdot 5\cdot 100+3\cdot 7= 2021;\\
62\cdot 68 &= 6\cdot 7\cdot 100+2\cdot 8= 4216;\\
103\cdot 107 &= 10\cdot 11\cdot 100+3\cdot 7= 11021;\\
51\cdot 59 &= 5\cdot 6\cdot 100+1\cdot 9= 3009.
\end{aligned}$$

§ 38. Умножение расположенных многочленов.

Покажем на примере, как производится умножение расположенных многочленов.

$$\begin{array}{rrrrr}
\times\; 3x^2 - 2ax + 5a^2 & & & & \\
- x^2 + 3ax + 4a^2 & & & & \\
\hline
-3x^4 & +2ax^3 & -5a^2x^2 & & \\
 & 9ax^3 & -6a^2x^2 & +15a^3x & \\
 & & 12a^2x^2 & -8a^3x & +20a^4 \\
\hline
-3x^4 & +11ax^3 & +a^2x^2 & +7a^3x & +20a^4
\end{array}$$

Из этого примера видим, что многочлены располагаются один под другим (оба многочлена расположены по убывающим степеням относительно буквы x).

Все члены множимого умножаются на первый член множителя, и результат записывается в строку под чертой. Затем все члены множимого умножаются на второй член множителя, и результат записывается во второй строке так, чтобы подобные члены оказались друг под другом.

Так же записываются произведения всех членов множимого на третий член множителя и так далее до конца.

В результате получается столько строк, сколько членов в множителе, причём все подобные члены окажутся в одном столбце.

Эти подобные члены приводятся, и окончательный результат записывается внизу под чертой. В итоге получится тоже расположенный многочлен.

(Проверить подстановкой в данные многочлены и в произведение значений: 1) $x=1$, $a=1$; 2) $x=1$, $a=-1$.)

Приведём ещё пример.

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{l} 2x^3 - 5x - 4 \\ 3x^2 - 7x + 8 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{rrrrrr}
6x^5 & & -15x^3 & -12x^2 & & \\
& -14x^4 & & +35x^2 & +28x & \\
& & 16x^3 & & -40x & -32 \\
\hline
6x^5 & -14x^4 & +x^3 & +23x^2 & -12x & -32.
\end{array}
\end{array}$$

Умножив $2x^3$ на $3x^2$, получили $6x^5$ и записали это произведение. Умножив $-5x$ на $3x^2$, получили $-15x^3$. Для записи этого произведения мы отступили вправо, оставив после $6x^5$ свободное место на тот случай, если в последующих произведениях окажется член, содержащий x^4 (так оно и случилось). В дальнейшем опять подписывали подобные члены под подобными.

(Проверить подстановкой: $x=1$ и $x=-1$.)

Рассматривая приведённые примеры умножения двух расположенных многочленов, можно сделать следующие выводы.

1. Старший член произведения равен произведению старших членов перемножаемых многочленов.

Действительно, перемножая члены с наибольшими показателями главной буквы, мы и в произведении получим член с наибольшим показателем при этой букве.

Других членов с тем же показателем мы получить в произведении не можем, так как во всех остальных частных произведениях хотя один из перемножаемых членов будет иметь показатель меньший, чем показатель в старшем члене того же многочлена.

Рассуждая подобным же образом, найдём:

2. Низший член произведения равен произведению низших членов перемножаемых многочленов.

Таким образом, старший и низший члены произведения не могут иметь подобных членов. Следовательно, когда мы будем приводить в полученном произведении подобные члены, то старший и низший члены непременно останутся; остальные же — все или некоторые — после приведения могут уничтожиться. Отсюда следует:

3. Произведение многочленов не может иметь менее двух членов.

Пример.

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} a^3 - 2a^2 + 4a - 8 \\ a + 2 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{rrrrr}
a^4 & -2a^3 & +4a^2 & -8a & \\
& 2a^3 & -4a^2 & +8a & -16 \\
\hline
a^4 & & & & -16
\end{array}
\end{array}$$

После приведения подобных членов получили в произведении a^4-16, то есть остались только старший и низший члены. Остальные взаимно уничтожились.

(Проверить подстановкой $a=3$.)

§ 39. Возведение в степень одночленов.

1. Возведение степени в степень. Возведём a^3 в квадрат и в куб. Получим:

$$(a^3)^2=a^3\cdot a^3=a^6;$$
$$(a^3)^3=a^3\cdot a^3\cdot a^3=a^9.$$

Точно так же:

$$(x^2)^4=x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot x^2=x^8.$$

Вообще:

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\ \ldots\ldots\ a^m}_{n\ \text{раз}}=a^{mn}.$$

Значит: $(a^m)^n=a^{mn}$.

(Проверить:

1) при $a=2$, $m=2$, $n=3$; 2) при $a=-3$, $m=2$, $n=2$.)

Правило. ***Чтобы возвести степень в другую степень, надо основание взять в степени, равной произведению показателей степеней.***

2. Возведение в степень одночленов. Возведём одночлен $4a^2bc^3$ в квадрат и куб. По правилу умножения одночленов будем иметь:

$$(4a^2bc^3)^2=4a^2bc^3\cdot 4a^2bc^3=16a^4b^2c^6;$$
$$(4a^2bc^3)^3=4a^2bc^3\cdot 4a^2bc^3\cdot 4a^2bc^3=64a^6b^3c^9.$$

Отсюда можем вывести такое правило.

Правило. ***Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень каждый сомножитель и полученные результаты перемножить.***

Пример.

$$(2x^2y^3z)^4=16x^8y^{12}z^4.$$

(Проверить подстановкой: $x=1$, $y=-1$, $z=2$.)

§ 40. Формулы сокращённого умножения.

При выполнении различных алгебраических преобразований довольно часто встречаются некоторые особые случаи умножения. Получающиеся при этом произведения полезно запомнить наизусть, чтобы в дальнейшем, когда эти случаи встретятся, можно было сразу написать произведение, не производя каждый раз почленного умножения. Эти произведения и называются поэтому формулами сокращённого умножения.

Кроме того, эти формулы бывает удобно применять при устных вычислениях.

1. Квадрат суммы. Возведём в квадрат сумму двух чисел a и b.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2.$$

Приведя подобные члены, получим:

$$\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.}$$

Эту формулу следует запомнить как в приведённой записи, так и в словесном выражении.

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.

Примеры.

1. $(3a+2b)^2=(3a)^2+2\cdot 3a\cdot 2b+(2b)^2=9a^2+12ab+4b^2.$

Следует приобрести навык писать сразу окончательный результат, не производя промежуточной записи, которая показана в этом примере.

2. Эта формула применяется при устном возведении в квадрат чисел, немного больших круглого числа, например:

$41^2=(40+1)^2=40^2+2\cdot 40+1=1681;$

$32^2=(30+2)^2=30^2+2\cdot 2\cdot 30+2^2=900+120+4=1024.$

3. Особенно легко запомнить приём возведения в квадрат чисел, оканчивающихся пятёркой. Положим, число имеет a десятков и 5 единиц. Тогда его можно записать так:

$$10a+5.$$

Возведём это число в квадрат по формуле:

$$(10a+5)^2=100a^2+2\cdot 5\cdot 10a+5^2=100a^2+100a+25=$$
$$=100a(a+1)+25.$$

Полученное выражение показывает, что для возведения в квадрат числа, оканчивающегося пятёркой, надо число его десятков умножить на число, единицей большее, и к произведению приписать 25. Например:

$$65^2=6\cdot 7\cdot 100+25=4225;$$
$$85^2=8\cdot 9\ (\text{сотен})+25=7225;$$
$$3{,}5^2=3\cdot 4+0{,}25=12{,}25.$$

Последний пример можно записать так:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2=3\cdot 4+\frac{1}{4}=12\frac{1}{4}.$$

Значит, чтобы возвести в квадрат смешанное число, дробная часть которого равна $\frac{1}{2}$, достаточно целую часть умножить на число, единицей большее, и к произведению прибавить $\frac{1}{4}$.

$$\left(8\frac{1}{2}\right)^2=8\cdot 9+\frac{1}{4}=72\frac{1}{4};\quad \left(24\frac{1}{2}\right)^2=24\cdot 25+\frac{1}{4}=600\frac{1}{4}.$$

2. Квадрат разности.

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2;$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.}$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.

Эта формула отличается от ранее выведенной формулы только знаком среднего члена. Поэтому часто пишут сразу обе формулы так:

$$\boldsymbol{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.}$$

Примеры.

1. $$(4a^2b-ab)^2=16a^4b^2-8a^2b\cdot ab+a^2b^2=$$
$$=16a^4b^2-8a^3b^2+a^2b^2.$$

И здесь следует стараться написать сразу результат, производя промежуточные вычисления в уме.

2. Эта формула применяется при устном возведении в квадрат чисел, немного меньших круглого числа, например:

$$39^2=(40-1)^2=40^2-2\cdot 40+1=1521;$$
$$48^2=(50-2)^2=2500-2\cdot 2\cdot 50+4=2304;$$
$$79^2=(80-1)^2=6400-160+1=6241.$$

3. Произведение суммы двух чисел на их разность.

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2;$$
$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2.}$$

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.

Примеры.

1. $(5a+2b)(5a-2b)=25a^2-4b^2$.
2. $(2a^2+3b^3)(2a^2-3b^3)=4a^4-9b^6$.

3. Эта формула применяется при устном умножении двух чисел, из которых одно на столько единиц больше круглого числа, на сколько другое меньше его, например: 47 и 53, 68 и 72.

$$47\cdot 53=(50-3)(50+3)=50^2-3^2=2491;$$
$$68\cdot 72=70^2-4=4896;$$
$$33\cdot 27=900-9=891.$$

4. Но иногда бывает полезно поступить наоборот: для вычисления разности квадратов двух чисел заменить эту разность произведением суммы оснований на их разность, например:

$$102^2-101^2=(102-101)(102+101)=203;$$
$$54^2-46^2=(54-46)(54+46)=800;$$
$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2-\left(2\frac{1}{2}\right)^2=\left(7\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}\right)\left(7\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}\right)=50.$$

4. Куб суммы.

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3;$$
$$\mathbf{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.}$$

Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, плюс куб второго числа.

Примеры.

1. $(2a+3b)^3=8a^3+3\cdot 4a^2\cdot 3b+3\cdot 2a\cdot 9b^2+27b^3=$
$=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3.$
2. $11^3=10^3+3\cdot 10^2+3\cdot 10+1=1331.$

5. Куб разности.

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b).$$

Произведя умножение и приведя подобные члены, получим:

$$\mathbf{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.}$$

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, минус куб второго числа.

Примеры.

1. $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8.$
2. $(3a-2b)^3=27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3.$

6. Сумма кубов. Трёхчлен $a^2 - ab + b^2$ называется неполным квадратом разности чисел a и b. Умножим его на $a + b$.

$$\begin{array}{r} \times\; a^2 - ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 - a^2b + ab^2 \\ + a^2b - ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + b^3 \end{array}$$

Отсюда имеем:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел.

Но обычно эта формула читается справа налево так:

Сумма кубов двух чисел равна сумме этих чисел, умноженной на неполный квадрат их разности.

7. Разность кубов.

Трёхчлен $a^2 + ab + b^2$ называется неполным квадратом суммы. чисел a и b. Умножим его на $a - b$.

$$\begin{array}{r} \times\; a^2 + ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 + a^2b + ab^2 \\ - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - b^3 \end{array}$$

Отсюда:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих чисел.

Но обычно эта формула читается справа налево так:

Разность кубов двух чисел равна разности этих чисел, умноженной на неполный квадрат их суммы.

§ 41. Общие замечания о делении целых алгебраических выражений.

Как известно из арифметики, при делении целых чисел не всегда можно получить целое частное. В этом случае говорят, что делимое не делится нацело на делитель. Например, 17 не делится нацело на 5. В таких случаях поступают двояко.

1) Производят деление с остатком. Например:

$17:5=3$ (ост. 2) или:
$$\begin{array}{r|l} -\,17 & 5 \\ \underline{15} & \overline{3} \\ 2 & \end{array}$$

2) Записывают частное в виде дробного числа, беря делимое числителем, а делитель знаменателем. Например:

$$17:5=\frac{17}{5}; \quad 3:8=\frac{3}{8}.$$

Введение дробных чисел сделало возможным деление любых чисел (конечно, кроме деления на нуль).

Так же обстоит дело и при делении целых алгебраических выражений. Частное не всегда может быть целым алгебраическим выражением.

Если частное от деления целых алгебраических выражений является целым алгебраическим выражением и остаток от деления равен нулю, то говорят, что деление выполнено нацело или что делимое нацело разделилось на делитель.

Если же остаток от деления целых алгебраических выражений не равен нулю, то говорят, что делимое не делится нацело на делитель.

Пример 1. $2ab:b$.

В этом случае деление выполняется нацело: частное равно целому выражению $2a$. Действительно, умножим частное на делитель:

$$2a\cdot b=2ab.$$

Получили делимое. Значит, выражение $2ab$ нацело разделилось на b.

Пример 2. $(2ab+c):b$.

В этом случае мы не сможем найти такое целое выражение, которое, будучи умножено на b, дало бы делимое $2ab+c$. Деление нацело здесь невозможно. В таких случаях поступают так же, как в арифметике.

1) Производят деление с остатком. Например:

$(2ab+c):b=2a$ (ост. c) или:
$$\begin{array}{r|l} -\,2ab+c & b \\ \underline{2ab} & \overline{2a} \\ +c & \end{array}$$

Проверим выполненное действие.

Умножим частное на делитель и к произведению прибавим остаток.

$$2a \cdot b + c = 2ab + c.$$

Получили делимое.

2) Записывают частное в виде дробного выражения, беря делимое числителем, а делитель знаменателем, например:

$$(2ab + c) : b = \frac{2ab + c}{b}.$$

Сделаем ещё одно замечание. При всяком делении алгебраических выражений мы будем предполагать, что делитель не равен нулю, так как делить на нуль нельзя. Поэтому, если делитель содержит одну или несколько букв, то для них допустимыми являются только такие значения, которые не обращают делитель в нуль. Это условие надо всегда иметь в виду при делении алгебраических выражений.

§ 42. Деление одночленов.

1. Деление степеней одного и того же основания. Пусть требуется разделить 2^5 на 2^2:

$$2^5 : 2^2 = 32 : 4 = 8 = 2^3.$$

Итак:

$$2^5 : 2^2 = 2^3.$$

Точно так же:

$$3^6 : 3^4 = 3^2.$$

Проверка. $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$.

$$a^5 : a^3 = a^2.$$

Проверка. $a^2 \cdot a^3 = a^5$.

Вообще при делении степеней одного и того же числа в частном должно получиться то же число с таким показателем, который в сумме с показателем делителя даст показатель делимого. Значит, показатель в частном должен быть равен разности показателей в делимом и в делителе.

$$a^7 : a^4 = a^3.$$

Вообще:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Здесь m и n — натуральные числа, причём $m > n$.

Примечание. Если m равно n, то в этом случае делитель и делимое равны и, значит, частное равно единице:

$$a^m : a^m = 1.$$

2. Деление одночленов. Пусть требуется выполнить деление:

$$10a^5b^3c:4a^3b.$$

Воспользуемся свойствами деления, приведёнными в § 26.

Разделим делимое на 4. Для этого достаточно разделить на 4 коэффициент 10. Получим:

$$2{,}5a^5b^3c.$$

Разделим результат на a^3. Для этого достаточно a^5 разделить на a^3. Получим:

$$2{,}5a^2b^3c.$$

Разделим результат на b. Для этого достаточно разделить b^3 на b; получим окончательно:

$$10a^5b^3c:4a^3b=2{,}5a^2b^2c.$$

Умножив $4a^3b$ на $2{,}5a^2b^2c$, получим делимое.

Значит, деление произведено верно.

Конечно, нет необходимости записывать отдельно все промежуточные результаты. Все деления производятся последовательно, и сразу записывается результат.

Пример 1. $18x^6y^2z^3:6x^2y^2z=3x^4z^2$.

Делим 18 на 6; в частном записываем 3.

Делим x^6 на x^2; в частном записываем x^4.

Делим y^2 на y^2; в частном получается единица, которую не пишем.

Делим z^3 на z; в частном записываем z^2.

В итоге получили частное $3x^4z^2$.

(Проверить подстановкой: $x=1$, $y=2$, $z=2$.)

Пример 2. Решить уравнение:

$$6ax^3:3ax^2=4.$$

Произведя деление, получим:

$$2x=4; \quad x=2.$$

Проверить подстановкой в данное уравнение.

Итак, можем вывести такое правило.

Правило. ***Чтобы разделить одночлен на одночлен, надо:***

1) ***разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя;***

2) ***к полученному частному приписать множителями каждую букву делимого с показателем, равным разности показателей этой буквы в делимом и делителе.***

Из правила деления одночленов следует:

1. Если какая-либо буква входит только в делимое, то она входит в частное с тем же показателем.

2. Если показатели какой-либо буквы в делимом и в делителе одинаковы, то эта буква не войдёт в частное.

Из этого же правила следует, что деление одночленов нацело невыполнимо:

1. Если показатель какой-либо буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом.

2. Если делитель содержит букву, которой нет в делимом.

§ 43. Деление многочлена на одночлен.

Воспользуемся правилом деления суммы (§ 26).

Применим это правило к делению многочлена на одночлен.

Пусть надо выполнить деление:

$$(6a^4b^2 - 7a^3b + 3{,}6a^2b^3):2a^2b.$$

Разделив на $2a^2b$ каждый член многочлена, получим:

$$3a^2b - 3{,}5a + 1{,}8b^2.$$

Проверим умножением частного на делитель:

$$(3a^2b - 3{,}5a + 1{,}8b^2)\cdot 2a^2b = 6a^4b^2 - 7a^3b + 3{,}6a^2b^3.$$

Получили делимое. Значит, деление произведено верно.

Отсюда получаем такое правило.

Правило. ***Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные частные сложить.***

Из этого правила следует, что многочлен делится нацело на одночлен лишь в том случае, если каждый член многочлена делится на этот одночлен.

Другими словами, необходимо, чтобы делитель был общим множителем всех членов многочлена.

Поэтому, если, например, делитель содержит букву, не входящую хотя бы в один из членов многочлена, то мы сразу можем сказать, что деление (нацело) невыполнимо.

Точно так же деление невыполнимо, если показатель какой-либо буквы в делителе больше, чем показатель этой же буквы хотя бы в одном из членов многочлена.

§ 44. Деление многочленов.

При делении многочленов обычно располагают их по убывающим степеням одной и той же буквы. Покажем на примерах, как выполняется деление расположенных многочленов.

Пример 1. Пусть требуется разделить $6a^3-4a^2$ на $3a-2$.

Располагаем делимое и делитель так же, как при делении чисел в арифметике.

$$6a^3-4a^2 \,\big|\, \underline{3a-2}$$

Предположим, что деление выполнимо нацело, то есть в частном получится некоторый многочлен (в частности, это может быть и одночлен). Его мы тоже расположим по убывающим степеням буквы a.

Так как делимое равно делителю, умноженному на частное, то старший член делимого равен произведению старших членов делителя и частного. Отсюда следует:

Чтобы найти старший член частного, надо старший член делимого разделить на старший член делителя.

Разделив $6a^3$ на $3a$, получим $2a^2$ — это старший член частного. Убедимся, не состоит ли частное из одного только этого члена $2a^2$. Для этого умножим делитель на частное и посмотрим, получится ли в результате делимое:

$$(3a-2)\cdot 2a^2=6a^3-4a^2.$$

Получили делимое. Значит, действительно, деление здесь выполнимо нацело и частное равно $2a^2$.

Весь процесс деления и проверки записывается так:

$$\begin{array}{r|l} -\;6a^3-4a^2 & 3a-2 \\ \cline{2-2} \underline{6a^3-4a^2} & 2a^2 \\ 0 & \end{array}$$

Записываем в частном найденный старший член, умножаем на него делитель, произведение подписываем под делимым и вычитаем его из делимого. Получили в остатке нуль. Это и показывает, что произведение делителя на частное оказалось равным делимому.

Пример 2. Разделить $10x^2-7x-12$ на $2x-3$.

Запишем, как и в первом примере:

$$10x^2-7x-12 \,\big|\, \underline{2x-3}$$

Допустим опять, что деление выполнимо нацело и в частном получится многочлен. Найдём старший член частного, разделив $10x^2$ на $2x$. Получим $5x$. Затем, как и в первом примере, умножим делитель на $5x$, произведение подпишем под делимым и вычтем его из делимого. Если в остатке получим нуль, то, значит, $5x$ и есть искомое частное. Запишем весь этот процесс:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 10x^2 - 7x - 12 \\ 10x^2 - 15x \quad\ \ \end{array} & \begin{array}{l} 2x - 3 \\ \hline 5x \end{array} \\ \hline 8x - 12 & \end{array}$$

Получили остаток, не равный нулю. Это показывает, что частное состоит не из одного члена $5x$ (или что деление нацело не возможно; этот случай мы рассмотрим ниже).

Тогда делимое равно произведению делителя на первый член частного, плюс произведение делителя на второй член частного и т. д.

Но произведение делителя на первый член частного мы уже вычли из делимого. Значит, остаток $8x - 12$ может содержать лишь произведение делителя на второй и следующие члены частного. Старший член остатка $8x$ должен равняться произведению старшего члена делителя на второй член частного. Значит:

Чтобы найти второй член частного, надо старший член первого остатка разделить на старший член делителя.

Разделив $8x$ на $2x$, получим 4. Чтобы убедиться, не является ли $8x - 12$ произведением делителя только на второй член частного, поступаем попрежнему: умножаем делитель на 4, произведение подписываем под остатком и вычитаем его. Получим следующую запись:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 10x^2 - 7x - 12 \\ 10x^2 - 15x \quad\ \ \end{array} & \begin{array}{l} 2x - 3 \\ \hline 5x + 4 \end{array} \\ \cline{1-1} -\begin{array}{r} 8x - 12 \\ 8x - 12 \end{array} & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

В остатке получили нуль. Значит, деление на этом закончилось; частное равно $5x + 4$.

Проверить правильность результата можно, умножив делитель $2x - 3$ на частное $5x + 4$.

Если бы вместо нуля и здесь получился остаток (второй остаток), то мы нашли бы третий член частного, разделив старший член второго остатка на старший член делителя, и т. д. Покажем весь процесс деления ещё на одном примере.

Пример 3. Разделить $x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5$ на $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$.

Весь процесс деления виден из следующей записи:

$$
\begin{array}{l|l}
-\;x^5-5ax^4+10a^2x^3-10a^3x^2+5a^4x-a^5 & x^3-3ax^2+3a^2x-a^3 \\
\;\underline{x^5-3ax^4+3a^2x^3-a^3x^2} & \overline{x^2-2ax+a^2} \\
\qquad -\;-2ax^4+7a^2x^3-9a^3x^2+5a^4x-a^5 & \ldots\ldots \text{1-й остаток} \\
\qquad \;\underline{-2ax^4+6a^2x^3-6a^3x^2+2a^4x} & \\
\qquad\qquad -\;a^2x^3-3a^3x^2+3a^4x-a^5 & \ldots\ldots \text{2-й остаток} \\
\qquad\qquad \;\underline{a^2x^3-3a^3x^2+3a^4x-a^5} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{3-й остаток}
\end{array}
$$

Итак, частное равно $x^2-2ax+a^2$ (можно сделать проверку умножением).

Приведём, наконец, пример деления, когда оно не выполняется нацело.

Пример 4. Разделить $3m^4+10m^3-6m^2+25m-1$ на m^2+4m-1.

Выполняем деление так же, как и в предыдущих примерах.

$$
\begin{array}{l|l}
-\;3m^4+10m^3-6m^2+25m-1 & m^2+4m-1 \\
\;\underline{3m^4+12m^3-3m^2} & \overline{3m^2-2m+5} \\
\qquad -\;-2m^3-3m^2+25m-1 & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{1-й остаток} \\
\qquad \;\underline{-2m^3-8m^2+2m} & \\
\qquad\qquad -\;5m^2+23m-1 & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{2-й остаток} \\
\qquad\qquad \;\underline{5m^2+20m-5} & \\
\qquad\qquad\qquad 3m+4 & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{3-й остаток}
\end{array}
$$

Старший член третьего остатка уже не делится на старший член делителя. Это и показывает, что в данном случае деление нацело невозможно. В итоге мы получили целое частное $3m^2-2m+5$ и остаток $3m+4$. Проверку можно сделать, умножив делитель на полученное частное и прибавив остаток:

$$(m^2+4m-1)(3m^2-2m+5)+(3m+4).$$

Выполнив указанные действия и приведя подобные члены, получим делимое.

Из приведённых примеров мы можем вывести следующее правило деления многочленов, расположенных по убывающим степеням главной буквы.

1. Делим старший член делимого на старший член делителя. Получим первый член частного.

2. Умножаем делитель на первый член частного и произведение вычитаем из делимого. Получим первый остаток.

3. Делим старший член первого остатка на старший член делителя. Получим второй член частного.

4. Умножаем делитель на второй член частного и произведение вычитаем из первого остатка. Получим второй остаток.

5. Поступаем со вторым остатком так же, как с первым, и так продолжаем до тех пор, пока не получим в остатке нуль, или остаток, старший член которого не делится на старший член делителя.

В первом случае деление выполнилось нацело; во втором случае деление нацело невозможно; последний остаток и является остатком от деления данных многочленов.

§ 45. Сокращённое деление по формулам.

В некоторых случаях деления можно сразу записать частное, не производя деления, по правилу деления многочленов.

Воспользуемся для этого формулами сокращённого умножения, выведенными в § 40.

Запишем эти формулы в таком виде:

1. $$\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b.$$

Разность квадратов двух чисел, делённая на разность оснований, равна сумме этих чисел.

2. $$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b.$$

Разность квадратов двух чисел, делённая на сумму оснований, равна разности этих чисел.

3. $$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2.$$

Разность кубов двух чисел, делённая на разность оснований, равна неполному квадрату суммы этих чисел.

4. $$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2.$$

Сумма кубов двух чисел, делённая на сумму оснований, равна неполному квадрату разности этих чисел.

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ.

РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ.

§ 46. Понятие о разложении на множители.

Пусть требуется найти числовую величину выражения:

$$ab + ac - ad$$

при $a = 37$, $b = 26$, $c = 17$ и $d = 23$.

Подставив заданные значения букв, найдём:

$$37 \cdot 26 + 37 \cdot 17 - 37 \cdot 23 = 962 + 629 - 851 = 740.$$

Но можно найти числовую величину этого выражения гораздо быстрее и легче, если преобразуем его.

На основании распределительного закона можем записать:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d).$$

Найдём числовую величину полученного выражения, тождественного данному. Получим:

$$37 \cdot (26 + 17 - 23) = 37 \cdot 20 = 740.$$

Все вычисления легко производятся в уме.

Итак, в этом случае оказалось выгодным данное выражение (алгебраическую сумму) представить в виде произведения двух сомножителей — одночлена и многочлена.

Такое преобразование находит большое применение в алгебре; оно называется разложением на множители.

Определение. **Разложить на множители алгебраическую сумму — значит представить эту сумму в виде произведения.**

Разложение на множители алгебраических выражений во многом сходно с разложением целых чисел на простые множители в арифметике. Там мы прибегали к разложению на множители, когда нужно было сократить дробь или привести несколько дробей к общему знаменателю (при сложении и вычитании дробей).

Такое же применение имеет в алгебре разложение на множители алгебраических выражений. В следующей главе излагаются алгебраические дроби и действия с ними. Сокращение дробей, нахождение наименьшего общего знаменателя при сложении и вычитании дробей значительно облегчают преобразования и вычисления. А для этого требуется предварительно представить (когда это возможно) числитель и знаменатель в виде произведения, то есть разложить их на множители.

Но в алгебре разложение на множители применяется не только при действиях с дробями.

Выше уже приведён пример того, как разложение на множители облегчило нахождение числовой величины алгебраического выражения.

Разложение на множители применяется также при решении некоторых уравнений и в других разделах алгебры.

Приведём наиболее употребительные и наиболее простые приёмы разложения.

§ 47. Вынесение за скобки общего множителя.

Пример 1. Пусть дан многочлен:

$$6a^2-8ab+4a.$$

Легко видеть, что все его члены имеют общим множителем $2a$, так что можно это выражение записать в таком виде:

$$2a\cdot 3a-2a\cdot 4b+2a\cdot 2.$$

Применив распределительный закон, получим:

$$6a^2-8ab+4a=2a\cdot(3a-4b+2).$$

Таким образом, данный многочлен мы представили в виде произведения одночлена и многочлена.

Из этого примера видно, что для разложения многочлена на множители путём вынесения за скобки общего множителя следует:

1) определить этот общий множитель,

2) разделить на него данный многочлен,

3) записать произведение общего множителя и полученного частного (заключив это частное в скобки).

Покажем на примере, как это обычно делается.

Пример 2. Разложить на множители многочлен:

$$12x^4y^2-18x^3y^2+24x^2yz^3.$$

1) Найдём прежде всего наибольший общий делитель коэффициентов. Здесь 6.

2) Берём первую букву первого члена x и смотрим, в какой степени она входит во все члены. Наименьший показатель x равен двум (в третьем члене). Отсюда следует, что все члены многочлена делятся на x^2, то есть x^2 является их общим делителем.

3) Находим, что вторая буква первого члена y должна быть взята в первой степени. (Букву z не рассматриваем, так как уже в первом члене она отсутствует.)

Таким образом, общим делителем всех членов многочлена является одночлен $6x^2y$.

Остаётся найти частное от деления данного многочлена на этот одночлен. Чтобы не производить лишней записи, поступаем так: запишем данный многочлен, затем знак равенства и за ним одночлен, который мы выносим за скобки:

$$12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2yz^3 = 6x^2y \ldots$$

Теперь поставим скобку и будем за ней сразу писать частные от деления каждого члена данного многочлена на $6x^2y$.

Получим:

$$12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2yz^3 = 6x^2y\,(2x^2y - 3xy + 4z^3).$$

Это и есть окончательный результат.

Пример 3. Разложить на множители многочлен:

$$10a^3b - 8a^2b^3 + 2a.$$

Здесь сразу видно, что общим множителем может быть лишь $2a$, так как на 2 и на a делятся все члены; с другой стороны, последний член $2a$ никакого другого множителя не имеет. Поступая, как в предыдущем примере, получим:

$$10a^3b - 8a^2b^3 + 2a = 2a\,(5a^2b - 4ab^3 + 1).$$

Примечание. Так как мы делим на общий множитель каждый член данного многочлена, то многочлен в скобках должен непременно иметь столько же членов, сколько их было в данном многочлене. Нарушение этого правила является признаком наличия ошибки в преобразованиях. Так, в последнем примере от деления $2a$ на $2a$ получается частное 1 и число членов сохраняется.

Иногда алгебраическое выражение представляет собой алгебраическую сумму двух или нескольких слагаемых, причём все они имеют один и тот же многочленный множитель. Тогда он выносится за скобки так же, как и отдельная буква.

Пример 4. Разложить на множители:

$$5x^3(a-b) - 4x^2y\,(a-b) + 7xy^2(a-b).$$

Общий множитель будет $x\,(a-b)$.

Получим:

$$5x^3(a-b) - 4x^2y\,(a-b) + 7xy^2(a-b) = x\,(a-b)\,(5x^2 - 4xy + 7y^2).$$

§ 48. Способ группировки.

Пример 1. Разложить на множители выражение:

$$c(a-b)+d(a-b). \qquad (1)$$

Выносся общий множитель $a-b$, получим:

$$(a-b)(c+d). \qquad (2)$$

Между тем, если бы выражение (1) было дано в таком виде:

$$ac-bc+ad-bd, \qquad (3)$$

то, пытаясь применить изложенный в § 47 способ разложения, мы оказались бы в затруднении, так как все члены общего множителя не имеют. Только разбив члены на две группы

$$(ac-bc)+(ad-bd)$$

и вынеся в первой группе общий множитель c, а во второй общий множитель d

$$c(a-b)+d(a-b),$$

получим выражение (1), в котором ясно виден общий множитель $a-b$.

Заметим, что в выражении (3) мы могли бы сгруппировать члены и так:

$$(ac+ad)-(bc+bd).$$

По вынесении общих множителей в каждой группе получим:

$$a(c+d)-b(c+d).$$

Здесь общим множителем является $c+d$. Вынося его, получим:

$$(c+d)(a-b).$$

Это выражение отличается от (2) только порядком множителей.

Такой способ разложения на множители называется способом группировки. Приведём ещё примеры разложения на множители этим способом.

Пример 2. $2ac+3b-bc-6a$.

Общего множителя все члены данного многочлена не имеют. Следовательно, первый способ неприменим. Попробуем применить способ группировки. Если сгруппируем члены по два в том порядке, как они написаны, то получим:

$$(2ac+3b)-(bc+6a).$$

Оказалось, что в обеих группах нет общих множителей, а потому и общего двучленного множителя мы не получим. Проба оказалась неудачной. Попробуем сгруппировать члены по-другому, именно первый с третьим и второй с четвёртым:

$$(2ac-bc)+(3b-6a).$$

По вынесении за скобки общих множителей получим:

$$c(2a-b)+3(b-2a).$$

Как видим, двучлены $2a-b$ и $b-2a$ отличаются только знаками. Чтобы сделать их одинаковыми, достаточно переменить знаки у каждого члена во второй скобке, а чтобы результат не изменился, надо переменить одновременно знак перед скобкой. Получим:

$$c(2a-b)-3(2a-b).$$

Теперь легко находим, что данное выражение равно $(2a-b)(c-3)$.

Если сгруппировать первый член с четвёртым, а второй с третьим, то получим:

$$(2ac-6a)+(3b-bc)=2a(c-3)+b(3-c)=2a(c-3)-$$
$$-b(c-3)=(c-3)(2a-b),$$

то есть то же, что и раньше.

При некотором навыке можно избежать перемены знака во второй скобке, ставя сразу перед скобкой знак минус. Именно, заметив, что в первой группе первым членом в скобке будет c, члены второй группы располагают так, чтобы первым членом был также член, содержащий c. Тогда порядок преобразований был бы такой:

$$(2ac-6a)-(bc-3b)=2a(c-3)-b(c-3)=(c-3)(2a-b).$$

Пример 3. Разложить на множители:

$$ab-a-b+1.$$

Учитывая сделанное выше замечание, сразу запишем:

$$(ab-a)-(b-1)=a(b-1)-(b-1)=(b-1)(a-1).$$

§ 49. Применение формул сокращённого умножения.

Иногда многочлен удаётся разложить на множители, применив одну из формул сокращённого умножения (§ 40). Запишем третью из формул § 40 в обратном порядке:

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b).}$$

В левой части этого равенства двучлен, в правой же он представлен в виде произведения, то есть разложен на множители.

Значит, ***если двучлен представляет собой разность квадратов, то его можно представить в виде произведения суммы оснований на их разность.***

Пример.

$$16a^4b^2-9x^6=(4a^2b+3x^3)(4a^2b-3x^3).$$

Возьмём теперь формулу:

$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.}$$

Значит, ***если данный трёхчлен представляет собой сумму двух квадратов, сложенную с удвоенным произведением их оснований, то его можно представить в виде квадрата суммы*** (то есть в виде произведения двух одинаковых множителей).

Примеры.

1. $x^2+12x+36=(x+6)^2.$
2. $4a^2b^2+20abc^2+25c^4=(2ab+5c^2)^2.$

Точно так же применяется формула:

$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.}$$

Примеры.

1. $16m^2-8m+1=(4m-1)^2.$

2. Вычислить выражение

$$a^2-14a+49 \text{ при } a=47.$$

Вычисление выполняется в уме, если выражение разложить на множители:

$$a^2-14a+49=(a-7)^2.$$

Подставив в правую часть $a=47$, сразу получаем:

$$(47-7)^2=40^2=1600.$$

Так же применяются формулы:

$$\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3;}$$
$$\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3.}$$

Пример.

Вычислить выражение

$$a=x^3+9x^2+27x+27 \text{ при } x=17.$$

Разложив данный многочлен на множители, получим:

$$x^3+9x^2+27x+27=(x+3)^3.$$

Подставив $x=17$, найдём: $a=20^3=8000.$

Наконец, если данный двучлен представляет собой сумму или разность кубов, то он разлагается на множители по формулам:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Примеры.

1. $27a^3b^3+8c^3=(3ab+2c)(9a^2b^2-6abc+4c^2)$;
2. $64a^6b^3-1=(4a^2b-1)(16a^4b^2+4a^2b+1)$.

§ 50. Применение нескольких способов.

При разложении на множители заданного выражения прежде всего следует посмотреть, не имеют ли все его слагаемые общего множителя. Вынесение за скобки всех общих множителей является операцией, которую надо выполнить в первую очередь.

После этого следует рассмотреть многочлен, заключённый в скобках. Может случиться, что он в свою очередь допускает разложение каким-либо из способов, рассмотренных в § 48 и § 49.

В таком случае это разложение и нужно выполнить.

Поясним сказанное на примере.

Задача. *Доказать, что разность между кубом любого целого числа и самим числом всегда делится на* 6.

Обозначим произвольное целое число через n.

Надо доказать, что значение выражения n^3-n при любом целом значении n делится на 6.

Разложим полученное выражение на множители. Прежде всего вынесем за скобку общий множитель n. Получим:

$$n^3-n=n(n^2-1).$$

Видим, что выражение в скобках является разностью квадратов. Применив формулу, получим:

$$n^3-n=n(n-1)(n+1),$$

или, расположив числа по порядку:

$$n^3-n=(n-1)n(n+1).$$

Это равенство показывает, что выражение n^3-n представляет собой произведение трёх последовательных целых чисел. Но из трёх последовательных целых чисел одно непременно делится на 3 и по крайней мере одно делится на 2. Значит, n^3-n делится на 2 и на 3. Из арифметики мы знаем, что в таком случае оно делится и на 6.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ.

§ 51. Понятие об алгебраической дроби.

1. Определение алгебраической дроби. В § 41 было сказано, что если деление целых алгебраических выражений не может быть выполнено нацело (то есть остаток от деления не равен нулю), то частное записывается в виде дробного выражения, в котором делимое является числителем, а делитель — знаменателем.

Примеры дробных выражений:

$$\frac{a}{2b};\quad \frac{a^2-b}{2b-c};\quad \frac{3(x+y)^2-5}{8y^5};\quad \frac{(a+c)^3-(a-c)^2}{x^2+xy+y^2} \text{ и т. д.}$$

Числитель и знаменатель дробного выражения и сами могут быть дробными выражениями, например:

$$\frac{\frac{a+b}{c}}{5a^2};\qquad \frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{a}{b}-c}.$$

Из дробных алгебраических выражений наиболее часто приходится иметь дело с такими, в которых числитель и знаменатель являются многочленами (в частности, и одночленами). Каждое такое выражение называется алгебраической дробью.

Определение. **Дробное алгебраическое выражение, числитель и знаменатель которого многочлены, называется алгебраической дробью.**

Как и в арифметике, числитель и знаменатель алгебраической дроби называются членами дроби.

Примечание. Указанное выделение алгебраических дробей из дробных выражений вообще имеет место и в арифметике. Такие выражения, как

$$\frac{3+\frac{4}{5}}{\frac{5}{7}};\qquad \frac{0{,}3}{2{,}25},$$

являются дробными арифметическими выражениями. Но арифметической дробью (или просто дробным числом) называется только такое дробное выражение, числитель и знаменатель которого — целые числа.

Как уже сказано, числитель и знаменатель алгебраической дроби могут иногда содержать только один член, то есть быть одночленами. В частности, числитель может быть и числом, записанным цифрами.

Например, выражения

$$\frac{2}{a}; \qquad \frac{-4}{x+y}; \qquad \frac{1,3}{a^3+1}$$

являются алгебраическими дробями. Но знаменатель должен содержать по крайней мере одну букву. Такие выражения, как

$$\frac{a}{4}; \qquad \frac{x^2-y}{0,3}; \qquad \frac{a^3-3a^2b+c}{17-5,2},$$

являются по определению (§ 30) целыми выражениями, лишь записанными в виде дроби.

2. Допустимые значения букв. Относительно значений, которые могут принимать буквы, входящие в алгебраическую дробь, важно установить следующее.

Буквы, входящие в числитель, могут принимать любые значения (если не введены какие-либо дополнительные ограничения условием задачи).

Для букв же, входящих в знаменатель, допустимыми являются только те значения, которые не обращают в нуль знаменатель. Поэтому в дальнейшем всегда будем считать, что знаменатель алгебраической дроби не равен нулю ни при каких допустимых значениях букв.

3. Числовое значение дроби. Надо различать алгебраическую дробь от её числового значения. Значение алгебраической дроби может быть как целым, так и дробным числом, положительным, отрицательным, нулём. Например, значение дроби $\frac{a}{b}$

при $a=6$, $b=3$ равно 2;

при $a=-5$, $b=2$ равно $-\frac{5}{2}$;

при $a=0$, $b=5$ равно 0.

§ 52. Основное свойство дроби.

Для алгебраической дроби остаётся справедливым основное свойство, которое было установлено для дробных чисел в арифметике.

Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить на одно и то же не равное нулю число.

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

где m может быть любым числом — целым и дробным, положительным и отрицательным, но не равным нулю.

Доказательство.

Дробь $\frac{a}{b}$ есть по определению частное от деления a на b.

$$a:b=\frac{a}{b}.$$

где a и b — любые рациональные числа ($b \neq 0$).

Но в § 25 было доказано, что для деления рациональных чисел сохраняется свойство: частное не изменится, если делимое и делитель умножить на одно и то же число (не равное нулю). Значит:

$$am:bm=\frac{a}{b}.$$

Но по определению:

$$am:bm=\frac{am}{bm}.$$

В последних двух равенствах левые части равны. Следовательно, равны и правые части, то есть: $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

§ 53. Перемена знака у членов дроби.

Из основного свойства дроби вытекает, что величина дроби не изменится, если её числитель и знаменатель умножить на — 1, например:

$$\frac{6}{4}=\frac{-6}{-4}=1\frac{1}{2}; \quad \frac{-6}{4}=\frac{6}{-4}=-1\frac{1}{2}.$$

Но умножение любого числа (кроме нуля) на — 1 только меняет его знак на противоположный. Значит, мы можем сказать:

Значение дроби не изменится, если у числителя и знаменателя одновременно переменить знаки на противоположные.

К такому преобразованию дробей приходится иногда прибегать, например, при их сложении.

Пример.

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{-7}=\frac{5}{7}+\frac{-2}{7}=\frac{5+(-2)}{7}=\frac{3}{7}.$$

Посмотрим, что получится с дробью, если переменить знак только у одного из членов дроби:

$$\frac{6}{4}=1\frac{1}{2};\ \frac{-6}{4}=-1\frac{1}{2};\ \frac{6}{-4}=-1\frac{1}{2}.$$

Мы видим, что когда переменили знак только у числителя или только у знаменателя, то получили число, противоположное прежнему, то есть вся дробь переменила знак на противоположный.

Пусть мы изменили знак у одного из членов дроби; согласно предыдущему получили число, противоположное прежнему. Значит, если у этой новой дроби переменим знак на противоположный, то получим прежнюю дробь.

Пример. Пусть дана дробь $\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$. Изменив знак у числителя, получим $\frac{5}{2}$. Изменив знак перед этой дробью, получим $-\frac{5}{2}$, то есть прежнее значение дроби.

Отсюда заключаем:

Значение дроби не изменится, если переменить знак у одного из членов дроби и перед самой дробью.

Это правило применяется и при действиях с дробями. Так, предыдущий пример можно было выполнить и таким образом:

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{-7}=\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}.$$

Переменив знак у знаменателя второй дроби, мы переменили знак и перед самой дробью.

Приведём ещё пример:

$$\frac{8}{13}-\frac{4}{-13}=\frac{8}{13}-\frac{-4}{13}=\frac{8-(-4)}{13}=\frac{12}{13},$$

или:

$$\frac{8}{13}-\frac{4}{-13}=\frac{8}{13}+\frac{4}{13}=\frac{12}{13}.$$

В первом случае мы переменили знак у обоих членов второй дроби, оставив тот же знак перед дробью.

Во втором случае мы переменили знак только у знаменателя, но одновременно переменили знак и перед дробью.

В обоих случаях получили один и тот же результат, как и должно быть.

§ 54. Сокращение дробей.

Если записать основное свойство дроби (§ 52) в обратном порядке:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b},$$

то его можно словами сказать так.

Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель разделить на одно и то же число (не равное нулю).

Этим свойством пользуются для упрощения дроби: если числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель, то, разделив на него числитель и знаменатель, приведём дробь к более простому виду.

Такое преобразование называется сокращением дроби.

Примеры.

$$\frac{5a}{10b}=\frac{a}{2b}; \quad \frac{6x^2}{2xy}=\frac{3x}{y}; \quad \frac{18a^4b^3c}{12ab^4c}=\frac{3a^3}{2b}.$$

$$\frac{6a(p-q)}{4n(p-q)}=\frac{3a}{2n}; \quad \frac{5a^2(a^2-ab+b^2)}{6ab(a^2-ab+b^2)}=\frac{5a}{6b}.$$

Если числитель, или знаменатель, или и тот и другой являются многочленами, то надо предварительно разложить многочлены на множители (если это возможно) и после этого произвести возможные сокращения.

Пример.

$$\frac{a^2-5ab}{a^2b-5ab^2}=\frac{a(a-5b)}{ab(a-5b)}=\frac{1}{b}.$$

§ 55. Приведение дробей к общему знаменателю.

Основное свойство дроби даёт возможность дроби с различными знаменателями преобразовать в тождественные им дроби с одинаковыми знаменателями (говорят: привести дроби к общему знаменателю).

Такое преобразование приходится производить, как и в арифметике, при сложении и вычитании дробей с разными знаменателями.

Из рассмотрения нескольких примеров выведем общее правило приведения дробей к общему знаменателю.

1. Дроби с одночленными знаменателями. Приведём к общему знаменателю дроби:

$$\frac{m}{4ab^5};\ \frac{n}{6a^3c^2};\ \frac{p}{9a^4b^2}.$$

Общий знаменатель должен делиться на каждый из данных знаменателей. Составим его в таком порядке.

1) Коэффициент общего знаменателя должен делиться на 4, на 6 и на 9. Наименьшим таким числом будет наименьшее общее кратное этих чисел, то есть 36.

2) Общий знаменатель должен делиться на a, на a^3 и на a^4. Значит, он должен содержать множитель a^4.

3) Точно так же найдём, что буква b должна войти в знаменатель в пятой степени, а буква c — во второй степени.

В итоге получим общий наименьший знаменатель: $36a^4b^5c^2$.

Чтобы получить в первой дроби знаменатель $36a^4b^5c^2$, надо числитель и знаменатель умножить на $9a^3c^2$. Получим:

$$\frac{m}{4ab^5}=\frac{9a^3c^2m}{36a^4b^5c^2}.$$

Таким же образом найдём:

$$\frac{n}{6a^3c^2}=\frac{6ab^5n}{36a^4b^5c^2} \quad \text{и} \quad \frac{p}{9a^4b^2}=\frac{4b^3c^2p}{36a^4b^5c^2}.$$

Отсюда можем вывести такое правило.

Правило. ***Наименьшим общим знаменателем дробей с одночленными знаменателями будет наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей, умноженное на все различные буквы, входящие в знаменатели, причём каждая буква берётся с наибольшим показателем, с каким она входит в знаменатели.***

2. Дроби с многочленными знаменателями. Приведём к общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{4x^2-4y^2};\ \frac{b}{5x^2+10xy+5y^2};\ \frac{c}{10x^2-20xy+10y^2}.$$

Разложим на множители знаменатели:

$$4x^2-4y^2=4(x^2-y^2)=4(x+y)(x-y);$$
$$5x^2+10xy+5y^2=5(x^2+2xy+y^2)=5(x+y)^2;$$
$$10x^2-20xy+10y^2=10(x^2-2xy+y^2)=10(x-y)^2.$$

Составим общий знаменатель так же, как и в случае одночленных знаменателей.

Коэффициентом общего знаменателя будет наименьшее общее кратное чисел 4, 5 и 10, то есть 20.

Множитель $(x+y)$ возьмём в наибольшей степени, в которой он входит в знаменатели, то есть во второй. Множитель $(x-y)$ также возьмём во второй степени.

Наименьший общий знаменатель будет: $20(x+y)^2(x-y)^2$.

Дроби примут следующий вид:

$$\frac{a}{4x^2-4y^2}=\frac{a}{4(x+y)(x-y)}=\frac{5a(x+y)(x-y)}{20(x+y)^2(x-y)^2};$$

$$\frac{b}{5x^2+10xy+5y^2}=\frac{b}{5(x+y)^2}=\frac{4b(x-y)^2}{20(x+y)^2(x-y)^2};$$

$$\frac{c}{10x^2-20xy+10y^2}=\frac{c}{10(x-y)^2}=\frac{2c(x+y)^2}{20(x+y)^2(x-y)^2}.$$

(Проверить при $x=2$, $y=1$, $a=b=c=10$.)

Отсюда такое правило.

Правило. ***Чтобы привести к наименьшему общему знаменателю дроби с многочленными знаменателями, надо знаменатели разложить на множители. Наименьшим общим знаменателем будет наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей, умноженное на все различные множители, входящие в знаменатели, причём каждый множитель берётся с наибольшим показателем, с каким он входит в знаменатели.***

Примечание. Если какой-либо из знаменателей не разлагается на множители, то он берётся весь целиком как множитель.

§ 56. Сложение дробей.

Задача 1. *В первом классе роздали a тетрадей, во втором b тетрадей. Каждый ученик получил по m тетрадей. Сколько было учеников в обоих классах?*

Решим задачу двумя способами.

1-й способ.

1) Сколько было учеников в первом классе?

$$\frac{a}{m} \text{ учеников.}$$

2) Сколько было учеников во втором классе?

$$\frac{b}{m} \text{ учеников.}$$

3) Сколько было учеников в обоих классах?

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right) \text{ учеников.}$$

2-й способ.

1) Сколько роздано тетрадей в обоих классах?

$$(a+b) \text{ тетрадей.}$$

2) Сколько было учеников в обоих классах?

$$\frac{a+b}{m} \text{ учеников.}$$

Сравнивая оба ответа, заключаем, что:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}. \qquad (1)$$

Справедливость этого равенства для любых рациональных значений a, b и m можно показать так.

Мы знаем свойство деления (§ 26): чтобы разделить сумму, можно разделить каждое слагаемое и полученные частные сложить. Значит:

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}.$$

Читая это равенство справа налево, получим равенство (1). Значит, сложение выполнено нами верно.

Правило. 1. ***Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и сумму разделить на их общий знаменатель.***

При сложении дробей с различными знаменателями надо предварительно привести их к общему знаменателю.

Задача 2. *Школьники выехали на экскурсию в город. Они проехали до станции на лошадях a километров со скоростью v км в час, затем поездом b километров со скоростью в m раз большей. Сколько часов школьники находились в пути?*

Решение.

1) До станции школьники ехали $\frac{a}{v}$ часов.

2) Скорость поезда равна mv *км* в час.

3) Школьники ехали поездом $\frac{b}{mv}$ часов.

4) Всего школьники пробыли в пути $\left(\frac{a}{v}+\frac{b}{mv}\right)$ часов.

Чтобы упростить полученный ответ, произведём сложение. Так как знаменатели дробей различны, то надо дроби сначала привести к общему знаменателю. Легко видеть, что общий знаменатель mv.

Значит, числитель и знаменатель первой дроби надо умножить на m. Получим:

$$\frac{a}{v}+\frac{b}{mv}=\frac{am}{mv}+\frac{b}{mv}=\frac{am+b}{mv}.$$

Правило 2. ***Чтобы сложить дроби, надо привести их к общему знаменателю, сложить числители и сумму разделить на их общий знаменатель.***

§ 57. Вычитание дробей.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению: вычесть одно выражение из другого — значит найти такое третье выражение, которое, будучи сложено с вычитаемым, даст уменьшаемое.

Отсюда следует правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Правило 1. ***Чтобы вычесть дробь из другой дроби с тем же знаменателем, надо из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и разность разделить на их общий знаменатель.***

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Чтобы доказать справедливость этого равенства, сложим вычитаемое с разностью:

$$\frac{b}{m}+\frac{a-b}{m}=\frac{b+a-b}{m}=\frac{a}{m}.$$

Получили уменьшаемое. Значит, вычитание произведено верно.

При вычитании дробей с различными знаменателями надо предварительно привести их к общему знаменателю.

Задача 2. *Надо было засеять a гектаров поля. По плану колхоз должен был засевать b гектаров в день, но он увеличил посев на c гектаров в день. На сколько дней раньше срока колхоз закончил посев?*

Решение.

1) По плану колхоз должен был закончить посев в $\frac{a}{b}$ дней.

2) Фактически каждый день колхоз засевал $(b+c)$ гектаров.

3) Весь посев колхоз произвёл в $\frac{a}{b+c}$ дней.

4) Колхоз закончил посев раньше срока на $\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}\right)$ дней.

Произведём вычитание. Общий знаменатель $b(b+c)$.

Получим:

$$\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}=\frac{a(b+c)-ab}{b(b+c)}=\frac{ac}{b(b+c)}.$$

Правило 2. ***Чтобы вычесть дробь из другой дроби, надо привести их к общему знаменателю, из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и разность разделить на их общий знаменатель.***

§ 58. Умножение дробей.

Правило умножения алгебраических дробей такое же, как и для арифметических дробей.

Правило. ***Чтобы перемножить дроби, надо перемножить отдельно их числители и их знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе знаменателем произведения.***

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Так как целое выражение можно рассматривать как дробь с знаменателем, равным единице, то приведённое правило применяется и в том случае, когда некоторые из сомножителей — целые выражения.

§ 59. Деление дробей.

Рассматривая деление как действие, обратное умножению, получим следующее правило для деления дробей.

Правило. ***Чтобы разделить дробь на дробь, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю.***

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Докажем справедливость этого равенства. Умножим полученное частное на делитель:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

Получили делимое. Значит, деление произведено верно.

Так как всякое целое выражение можно рассматривать как дробь с знаменателем 1, то приведённое правило применимо и в том случае, когда делимое или делитель — целое выражение.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ.

§ 60. Общие сведения.

1. Определение уравнения.

Пусть даны два алгебраических выражения:

$$4x-5 \text{ и } 2x+9.$$

Числовое значение каждого из этих выражений зависит от значения буквы x, как это видно из следующей таблицы, где в первой строке даны различные значения x, а во второй и третьей — соответствующие значения данных алгебраических выражений.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$4x-5$	-13	-9	-5	-1	3	7	11
$2x+9$	5	7	9	11	13	15	17

Поставим такой вопрос: найдутся ли такие значения x, при которых оба данных выражения будут иметь одно и то же значение?

Другими словами: при каких значениях x будет справедливо равенство:

$$4x-5=2x+9$$

Это равенство содержит неизвестное число, обозначенное буквой x.

Такое равенство называется *уравнением с одним неизвестным*.

Уравнением с одним неизвестным называется равенство, в котором одно число, обозначенное буквой, является неизвестным.

Заметим, что уравнение с одним неизвестным, кроме буквы, обозначающей это неизвестное число, может содержать и другие буквы, которые будут означать некоторые известные, определённые числа.

Приведём ещё примеры уравнений с одним неизвестным.

$$1)\ 5x=2;\ 2)\ \frac{6a}{x-11}=1;\ 3)\ \frac{5}{x-3}=\frac{2}{x-1};$$

$$4)\ \frac{x^2-1}{x+2}=3;\ 5)\ 3x^4-5x^2+9=0;\ 6)\ x^5=a.$$

Во всех этих уравнениях x является неизвестным числом, а там, где имеются другие буквы (во втором и шестом уравнениях), мы считаем их известными.

Выражения, стоящие слева и справа от знака равенства, называются левой и правой частью уравнения.

2. Решения, или корни, уравнения. Пусть дано уравнение:

$$3x-7=29-6x.$$

Подставив в него вместо x число 4, получим:

$$3\cdot 4-7=5 \text{ и } 29-6\cdot 4=5.$$

Обе части уравнения оказались равными одному и тому же числу. Получили верное равенство. Наоборот, если подставим вместо x любое другое число, например 5, то будем иметь:

$$3\cdot 5-7=8;\ 29-6\cdot 5=-1.$$

Левая часть оказалась равной 8, а правая -1.

Получили неверное равенство. Задача решения уравнения и состоит в том, чтобы определить, при каких значениях неизвестного обе части уравнения равны одному и тому же числу. Другими словами, при каких значениях неизвестного равенство будет верным.

Решить уравнение — значит найти все те значения неизвестного, при которых уравнение обращается в верное равенство.

Все такие значения неизвестного называются его решениями, или корнями.

Так, в предыдущем примере $x=4$ является корнем, или решением, уравнения

$$3x-7=29-6x.$$

Говорят также, что значение $x=4$ удовлетворяет уравнению

$$3x-7=29-6x.$$

Наоборот, например, значение $x=5$ не удовлетворяет этому уравнению.

3. Число решений уравнения.

Уравнение может не иметь совсем решений.

Возьмём, например, уравнение:

$$x+5=x+1.$$

Какое бы значение мы ни давали букве x, левая часть этого уравнения всегда будет на 4 больше правой. Значит, нет таких значений x, которые обращали бы это уравнение в верное равенство. Уравнение не имеет решений.

Уравнение может иметь единственное решение.

Например, уравнение

$$x+3=7$$

имеет единственное решение: $x=4$.

Действительно, подставив в уравнение 4 вместо x, получим:

$$4+3=7$$

верное равенство. Подставив же в уравнение вместо x любое число, меньшее 4, получим в сумме с 3 число, меньшее 7, а подставив число, большее 4, получим в сумме с 3 число, большее 7. Значит, число 4 является единственным, которое в сумме с 3 даёт 7, то есть обращает данное уравнение в верное равенство.

Уравнение может иметь несколько решений.

Так, уравнение

$$(x-1)(x-2)(x-5)=0$$

имеет три решения: $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=5$.

Действительно, при $x=1$ обратится в нуль первый множитель в левой части, при $x=2$ — второй, при $x=5$ — третий. А если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то и всё произведение равно нулю.

Если же мы подставим в уравнение вместо x любое другое число, то ни один из сомножителей в левой части не обратится в нуль. Следовательно, не будет равно нулю и их произведение.

Уравнение может иметь бесчисленное множество решений.

Пусть дано уравнение:

$$5(x-3)+2=3(x-4)+2x-1.$$

Подставляя вместо x любое число, убедимся, что каждый раз левая и правая части уравнения будут равны. Значит, любое число является решением этого уравнения. Покажем это.

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим:

$$5x-15+2=3x-12+2x-1,$$

или

$$5x-13=5x-13.$$

В обеих частях оказалось одно и то же выражение.

Итак, данное уравнение оказалось равенством, справедливым при любых значениях буквы x. Но мы знаем (§ 31), что такое равенство называется тождеством.

Следовательно, уравнение может иногда оказаться тождеством.

Значит, тождество можно рассматривать как частный случай уравнения. Это — уравнение, корнями которого являются любые допустимые значения неизвестного.

§ 61. Равносильные уравнения.

1. Решим уравнения:

$$1)\ 2x-5=11 \quad \text{и} \quad 2)\ 7x+6=62.$$

Получим:

$$\begin{array}{ll} 2x=16 & \quad 7x=56 \\ x=8 & \quad x=8 \end{array}$$

Оба эти уравнения имеют один и тот же корень.

Определение. **Два уравнения называются равносильными, если каждое из них имеет те же корни, что и другое.**

Значит, приведённые выше два уравнения являются равносильными.

Наоборот, такие, например, уравнения:

$$(x-2)(x-5)=0 \quad \text{и} \quad x-2=0$$

неравносильны, так как первое имеет корни 2 и 5, а второе только корень 2; значит, корни у них не одни и те же.

Возьмём такие два уравнения:

$$x+2=2(x+1)-x \quad \text{и} \quad 3x=3(x-1)+3.$$

Оба уравнения удовлетворяются любыми значениями x. Чтобы убедиться в этом, раскроем скобки в обоих уравнениях. Получим:

$$x+2=2x+2-x \quad \text{и} \quad 3x=3x-3+3,$$

или:

$$x+2=x+2 \quad \text{и} \quad 3x=3x.$$

В обеих частях каждого уравнения стоит одно и то же выражение, поэтому понятно, что при любых значениях x правые и левые части каждого из этих уравнений равны одному и тому же числу.

Согласно нашему определению, эти уравнения тоже будут равносильными, так как все корни любого из них являются корнями и другого.

Наконец, если возьмём такие уравнения:

$$x+2=x+5 \quad \text{и} \quad 2x+7=2x,$$

то убедимся, что оба они не имеют решений. В самом деле, какие бы значения ни давали x, в первом уравнении всегда значение правой части будет на 3 больше значения левой и, следовательно, ни при каком значении x мы не получим верного равенства.

Точно так же при любых значениях x значение левой части второго уравнения будет всегда на 7 больше значения правой, и никогда они не смогут оказаться равными.

Итак, оба эти уравнения не имеют ни одного корня.

Мы будем такие уравнения, которые не имеют решения, также считать равносильными.

Для равносильных уравнений справедлива следующая теорема.

Теорема. ***Два уравнения, равносильные третьему, равносильны.***

Например, уравнения

$$3x+5=6x-7$$
$$\text{и } x+3=2x-1$$

равносильны, так как оба имеют единственный корень $x=4$.

Уравнения

$$2x+3=3x-1$$
$$\text{и } x+3=2x-1$$

тоже равносильны, так как оба имеют единственный корень $x=4$.

Значит, и уравнения

$$3x+5=6x-7$$
$$\text{и } 2x+3=3x-1$$

равносильны. Оба они имеют тот же единственный корень $x=4$.

Вспомним, как мы до сих пор решали уравнения.

Решим для примера уравнение

$$\frac{5x}{8}-7=13. \qquad (1)$$

Рассматривая $\frac{5x}{8}$ как неизвестное уменьшаемое, можем написать:

$$\frac{5x}{8}=20. \qquad (2)$$

Рассматривая $5x$ как неизвестное делимое, приходим к уравнению:

$$5x = 160. \qquad (3)$$

Наконец, рассматривая x как неизвестный множитель, приходим к уравнению:

$$x = 32, \qquad (4)$$

из которого заключаем, что корнем его, а значит и всех предыдущих уравнений, является число 32.

Таким образом, мы переходили от одного уравнения к другому, более простому. Найдя, что уравнение (4) имеет единственный корень 32, заключили, что этот единственный корень имеют и уравнения (3), (2) и, наконец, заданное (1). Мы, следовательно, считали, что все эти четыре уравнения равносильны.

Но действительно ли так обстоит дело?

Действительно ли при всех преобразованиях, которые производились над уравнениями, мы каждый раз получали уравнение, равносильное предыдущему?

Выяснению этого вопроса посвящён следующий параграф.

§ 62. Два основных свойства уравнений.

Покажем на примерах, что уравнения обладают следующими двумя важными свойствами.

Свойство 1. ***Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то новое уравнение будет равносильно данному.***

Примеры.

1. Пусть дано уравнение:

$$6x + 7 = 31.$$

Решив его, найдём единственный корень $x = 4$.

Прибавим к обеим частям уравнения по 15:

$$6x + 22 = 46.$$

Решив это уравнение, найдём, что и оно имеет единственный корень $x = 4$.

Прибавив к обеим частям данного уравнения -7; $2\frac{1}{2}$; -4, получим уравнения:

$$6x = 24; \quad 6x + 9\frac{1}{2} = 33\frac{1}{2}; \quad 6x + 3 = 27.$$

Решив их, опять получим для всех уравнений тот же единственный корень $x = 4$.

2. Пусть дано уравнение:

$$2x+6=2(x+1)+4.$$

Этому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестного. (Раскрыв скобки, убедимся, что оно является тождеством.)

Прибавив к обеим частям числа 7, -4, получим уравнения:

$$2x+13=2(x+1)+11;$$
$$2x+2=2(x+1).$$

Эти уравнения тоже удовлетворяются любыми значениями x. Значит, оба эти уравнения равносильны данному уравнению.

3. Пусть, наконец, имеем уравнение:

$$2x+7=2x+9.$$

Это уравнение совсем не имеет решений, так как при любом значении x правая часть всегда будет на 2 больше левой. Прибавив к обеим частям числа 5, -7, -13, получим уравнения:

$$2x+12=2x+14;$$
$$2x=2x+2;$$
$$2x-6=2x-4.$$

Легко убедиться, что все эти уравнения тоже не имеют решений. Значит, они равносильны данному уравнению.

Свойство 2. ***Если обе части уравнения умножить на одно и то же не равное нулю число, то новое уравнение будет равносильно данному.***

Примеры.

1. Возьмём, например, уравнение:

$$3x-5=13.$$

Оно имеет единственный корень $x=6$.

Умножим обе части его на 4. Получим:

$$12x-20=52.$$

Решив его, найдём, что и оно имеет единственный корень $x=6$. Значит, оба уравнения равносильны.

Умножив обе части данного уравнения на -2; на 5; на $\frac{1}{3}$, получим уравнения:

$$-6x+10=-26; \quad 15x-25=65; \quad x-\frac{5}{3}=\frac{13}{3}.$$

Решив их, найдём для каждого единственный корень $x=6$. Значит, все они равносильны данному уравнению.

2. Возьмём уравнение:

$$2x+6=2(x+1)+4.$$

Мы уже знаем, что этому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестного (то есть уравнение является тождеством). Умножив обе части его на числа 3; -2; $\frac{1}{2}$, получим уравнения:

$$6x+18=6(x+1)+12;$$
$$-4x-12=-4(x+1)-8;$$
$$x+3=(x+1)+2.$$

Легко убедиться, раскрыв в правой части скобки, что и эти уравнения являются тождествами. Значит, они равносильны данному уравнению.

3. Взяв, наконец, уравнение:

$$2x+7=2x+9,$$

не имеющее решений, умножим обе части его, например, на числа -3; $\frac{1}{2}$.

Получим уравнения:

$$-6x-21=-6x-27;$$
$$x+3\frac{1}{2}=x+4\frac{1}{2}.$$

Легко видеть, что оба эти уравнения тоже не имеют решений и, следовательно, равносильны данному уравнению.

Пользуясь двумя свойствами, мы можем теперь все уравнения, которые решали раньше, решать, уже не ссылаясь на зависимость между данными и результатами арифметических действий.

Решим, например, уравнение:

$$\frac{5x}{8}-7=13. \qquad (1)$$

Прибавим к обеим частям уравнения 7. На основании первого свойства полученное уравнение

$$\frac{5x}{8}=20 \qquad (2)$$

равносильно данному.

Умножим обе части этого уравнения на 8. На основании второго свойства полученное уравнение

$$5x=160$$

равносильно (2), а следовательно и данному (§ 61, теорема).

Разделив обе части этого уравнения на 5 $\left(\text{или умножив на } \frac{1}{5}\right)$, получим уравнение

$$x=32,$$

равносильное данному.

Теперь можно ответить на вопрос, поставленный в конце предыдущего параграфа. Оказывается, переходя от одного уравнения к другому на основании зависимости между компонентами арифметических действий, мы фактически применяли приведённые выше два свойства уравнений и, следовательно, каждый раз получали уравнение, равносильное предыдущему.

§ 63. Уравнения, содержащие неизвестное в обеих частях.

До этого мы решали уравнения, в которых неизвестное входило в одну часть уравнения. Но могут быть уравнения, которые содержат неизвестное в обеих частях, например:

$$3x - 17 = 18 - 2x.$$

Мы сумеем решить уравнение такого вида, если сможем преобразовать его так, чтобы члены, содержащие неизвестное, оказались только в одной части уравнения (то есть приведём уравнение к такому виду, который мы уже умеем решать).

Для этого изменим несколько формулировку первого свойства уравнений, изложенного в § 62.

Мы показали там, что получим уравнение, равносильное данному, если к обеим частям данного уравнения прибавим любое число.

Покажем теперь на примерах, что можно прибавлять к обеим частям не только число, но и любой многочлен, содержащий неизвестное.

Значит, сформулируем теперь первое свойство так.

Если к обеим частям уравнения прибавить один и тот же многочлен относительно неизвестного, то новое уравнение будет равносильно данному.

Покажем это на примерах.

1. Пусть дано уравнение:

$$3x - 7 = 8.$$

Решив его, найдём его единственный корень $x = 5$.

Прибавим к обеим частям этого уравнения одночлен $-2x$, получим уравнение:

$$3x - 7 - 2x = 8 - 2x;$$
$$x - 7 = 8 - 2x.$$

Подставив в него значение $x = 5$, убедимся, что 5 является корнем и этого уравнения. Других решений оно иметь не может.

В самом деле, при $x=5$ обе части этого уравнения равны одному и тому же числу. Если дадим x значение, большее пяти, то левая часть уравнения $x-7=8-2x$ увеличивается (так как увеличится уменьшаемое), а правая уменьшается (так как увеличивается вычитаемое) и, следовательно, равенство нарушится. Если же дадим x значение, меньшее пяти, то, наоборот, левая часть уменьшится, а правая увеличится.

Следовательно, уравнение $x-7=8-2x$ равносильно уравнению $3x-7=8$.

Прибавим к обеим частям данного уравнения $3x-7=8$ любые многочлены, например $3x-5$; x^2-7x+3. Получим уравнения (после приведения подобных членов):

$$6x-12=3x+3;$$
$$x^2-4x-4=x^2-7x+11.$$

Подставив в эти уравнения $x=5$, убедимся, что 5 является корнем и этих уравнений.

2. Возьмём уравнение:

$$3x+5=2(x+2)+x+1.$$

Этому уравнению удовлетворяют любые значения x.

Прибавив к обеим частям многочлен x^2-5x+1, получим уравнение:

$$x^2-2x+6=2(x+2)+x^2-4x+2.$$

Этому уравнению тоже удовлетворяют любые значения x. (Раскрыв скобки и приведя подобные члены, убедимся, что обе части уравнения тождественны.)

Значит, полученное уравнение равносильно данному.

3. Возьмём, наконец, уравнение:

$$x=x+3.$$

Это уравнение не имеет решений. Прибавив к обеим частям, например, x^2-3, получим уравнение:

$$x^2+x-3=x^2+x.$$

Очевидно, что и это уравнение не имеет решения, так как при любых значениях x правая часть будет на 3 больше левой.

Значит, и в этом случае получили равносильное уравнение.

Итак, на ряде примеров мы убедились в справедливости первого свойства уравнений в более общей формулировке. Так как всякое число есть одночлен, то, следовательно, изложенное в § 62 первое свойство является частным случаем приведённого здесь.

Теперь, пользуясь этим свойством, мы легко решим и уравнение, данное в начале этого параграфа:

$$3x - 17 = 18 - 2x.$$

Прибавим к обеим частям по $2x$; получим уравнение, равносильное данному:

$$3x - 17 + 2x = 18 - 2x + 2x,$$

или после упрощения:

$$5x - 17 = 18.$$

Но это уравнение мы решать уже умеем, получим:

$$5x = 35; \ x = 7.$$

Подставив $x = 7$ в данное уравнение, получим:

$$3 \cdot 7 - 17 = 4; \quad 18 - 2 \cdot 7 = 4;$$
$$4 = 4.$$

Корень найден верно.

Выведем некоторые следствия из первого свойства уравнений. Возьмём уравнение:

$$2x - 5 + 4x = 17 + 4x.$$

В обеих частях этого уравнения есть один и тот же член $4x$. Очевидно, если мы прибавим к обеим частям $-4x$ (или, что то же, вычтем $4x$), то эти члены в обеих частях уничтожатся и мы сразу получим уравнение $2x - 5 = 17$, равносильное данному.

Если в обеих частях уравнения имеются одинаковые члены, то их можно опустить.

Возьмём уравнение:

$$3x + 11 = 26 - 2x.$$

Чтобы сгруппировать в левой части члены, содержащие неизвестное, нужно к обеим частям прибавить $2x$, а чтобы сгруппировать в правой части свободные члены, надо к обеим частям прибавить -11.

Получим:

$$3x + 11 + 2x - 11 = 26 - 2x + 2x - 11,$$

или:

$$3x + 2x = 26 - 11.$$

Сравнивая это уравнение с данным, видим, что член $-2x$ оказался в левой части, а 11 — в правой, но оба при этом изменили знак на противоположный. Поэтому можем сказать:

Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, переменив его знак на противоположный.

Пример.

$$7x-11-2x+4=3x+18+x-2.$$

Перенесём все члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а все свободные члены — в правую, переменив у каждого из них знак на противоположный. Получим:

$$7x-2x-3x-x=18-2+11-4$$

или

$$x=23.$$

§ 64. Уравнение первой степени с одним неизвестным.

Уравнением первой степени с одним неизвестным называется уравнение вида

$$\boldsymbol{ax+b=0},$$

где x — неизвестное число, a (коэффициент при неизвестном) — любое данное число, не равное нулю, b (свободный член) — любое данное число.

Примеры уравнений первой степени с одним неизвестным:

$$3x-17=0; \quad 0{,}5x+8=0; \quad \frac{5x}{7}-\frac{3}{4}=0 \text{ и т. д.}$$

Многие уравнения после некоторых преобразований приводятся к уравнению первой степени с одним неизвестным.

Приведём пример.

$$\frac{3(x-1)}{2}+\frac{x-4}{3}=12-\frac{(x+1)}{2}.$$

Умножим обе части уравнения на 6. По сокращении получим:

$$9(x-1)+2(x-4)=72-3(x+1).$$

Раскроем скобки:

$$9x-9+2x-8=72-3x-3.$$

Перенесём все члены из правой части в левую (с противоположными знаками) и приведём подобные члены. Получим:

$$14x-86=0.$$

На основании первого и второго свойств уравнений полученное уравнение $14x-86=0$ равносильно данному. Оба они имеют корень $x=6\frac{1}{7}$.

Докажем теорему.

Теорема. ***Уравнение первой степени с одним неизвестным всегда имеет единственное решение.***

Доказательство.

Пусть дано уравнение

$$ax+b=0.$$

Перенесём b в правую часть. Получим равносильное уравнение:

$$ax=-b.$$

Разделив теперь обе части уравнения на неравное нулю число a, получим единственное значение для x, а именно:

$$x=-\frac{b}{a}.$$

(Из арифметики мы знаем, что деление — действие однозначное, то есть всегда даёт единственный результат.)

§ 65. Общая схема решения уравнений.

Решение всякого уравнения сводится к тому, что мы данное уравнение заменяем другим, ему равносильным, но более простым, это другое заменяем третьим и так продолжаем до тех пор, пока не получим самое простое уравнение вида $x=a$, которое прямо указывает, что неизвестное должно равняться числу a. Следовательно, $x=a$ должно быть решением и всех предыдущих равносильных ему уравнений, в том числе и данного.

Возьмём несколько уравнений и проследим, какие преобразования приходится над ними производить, чтобы прийти к простейшему уравнению.

Решим уравнение:

$$\frac{x-4}{3}+\frac{2(x+1)}{4}-1=\frac{5(x-3)}{2}+2x-\frac{11x+43}{6}.$$

1) Сделаем коэффициенты всех членов целыми числами. Для этого умножим все члены уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей, которое равно 12. Произведя сокращения, получим:

$$4(x-4)+6(x+1)-12=30(x-3)+24x-2(11x+43).$$

2) Чтобы отделить члены, содержащие неизвестное и свободные члены, раскроем скобки.

$$4x-16+6x+6-12=30x-90+24x-22x-86.$$

3) Сгруппируем теперь в одной части члены, содержащие неизвестное, в другой — свободные члены.

$$4x+6x-30x-24x+22x=-90-86+16-6+12.$$

4) Упростим уравнение, приведя подобные члены:

$$-22x = -154.$$

5) Разделим обе части на -22. Получим:

$$x = 7.$$

Решением этого уравнения, а следовательно, и всех предыдущих является 7.

Предлагаем учащимся проверить решение, подставив в каждое из полученных уравнений $x=7$, и убедиться, что 7 является корнем всех этих уравнений.

Решим ещё уравнение:

$$\frac{x-2}{2} - 1 = \frac{x-4}{a}.$$

1) Прежде всего введём условие, что a не равно нулю (пишут $a \neq 0$), так как при $a=0$ правая часть уравнения теряет смысл.

Освободим уравнение от дробных членов (говорят: приведём уравнение к целому виду). Наименьшее общее кратное знаменателей равно $2a$. Умножив обе части уравнения на $2a$, после сокращений получим:

$$a(x-2) - 2a = 2(x-4).$$

2) Раскроем скобки.

$$ax - 2a - 2a = 2x - 8.$$

3) Сгруппируем члены, содержащие неизвестное, в одной части, а свободные члены — в другой.

$$ax - 2x = -8 + 2a + 2a$$

4) Приведём подобные члены.

$$ax - 2x = 4a - 8,$$

или

$$(a-2)x = 4(a-2).$$

Если a не равно двум, то имеем уравнение первой степени, которое решим, разделив обе части на $a-2$.
Получим:

$$x = 4.$$

Если же $a=2$, то уравнение примет вид:

$$0 \cdot x = 0,$$

то есть уже не будет уравнением первой степени.

Очевидно, что это равенство будет верным при любом значении x, так как нуль, умноженный на любое число, даст в результате нуль.

Посмотрим, почему так получилось. Подставим в заданное уравнение 2 вместо a. Получим:

$$\frac{x-2}{2}-1=\frac{x-4}{2},$$

или

$$\frac{x-4}{2}=\frac{x-4}{2}.$$

Итак, в этом случае в обеих частях равенства имеем тождественные выражения. Понятно поэтому, что равенство будет верным при любом значении x.

Приведённые решения показывают, что в наиболее сложных случаях решение можно провести по следующей схеме:

1. Привести уравнение к целому виду.
2. Раскрыть скобки.
3. Сгруппировать члены, содержащие неизвестное в одной части уравнения, а свободные члены — в другой.
4. Привести подобные члены.
5. Если коэффициент при неизвестном не нуль, то разделить на него обе части уравнения.

Но эта схема ни в коей мере не может являться обязательной для всякого уравнения.

Во-первых, при решении многих более простых уравнений приходится начинать не с первого, а со второго, третьего и даже сразу с пятого этапа.

Во-вторых, при решении некоторые промежуточные этапы могут оказаться ненужными.

Пример.

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{3}.$$

После приведения уравнения к целому виду получаем:

$$4x-6=3x+4,$$

и сразу переходим к третьему этапу:

$$4x-3x=4+6.$$

Откуда $x=10$.

Раскрывать скобки здесь не пришлось.

В-третьих (и это главное), иногда бывает выгоднее нарушить порядок, указываемый схемой, так как уравнение тогда решается проще и короче.

Примеры.

1. $7(x-3)=56.$

Здесь следует, не раскрывая скобок, сначала разделить обе части на 7. Получим:

$$x-3=8;\quad x=11.$$

Уравнение решается в два действия.

Решение по схеме потребовало бы четырёх действий (два умножения, сложение и деление).

2. $\frac{17}{2}x+3=\frac{3}{2}x+87.$

Здесь выгоднее, не приводя уравнение к целому виду, сразу начать с третьего этапа, так как видно, что после приведения подобных членов коэффициент при x будет целым.

Ещё лучше одновременно выполнить третий и четвёртый этапы, то есть вычесть в уме $\frac{3}{2}$ из $\frac{17}{2}$ и 3 из 87 и сразу записать:

$$7x=84;\quad x=12.$$

§ 66. Решение задач с помощью уравнений.

Припомним, в каком порядке мы до сих пор решали задачи с помощью уравнений.

1. Обозначали буквой (обычно буквой x) неизвестное число, определить которое требуется вопросом задачи.

2. С помощью этой буквы и данных в задаче чисел выражали другие неизвестные числа, о которых говорится в задаче.

3. Составляли выражение, которое было бы равно одному из чисел, данных в задаче.

4. Приравнивали полученное выражение этому числу. Получали уравнение.

5. Решали уравнение и получали ответ на вопрос задачи.

6. Если задача требовала найти не одно, а несколько чисел, то, узнав одно из них, находили и остальные.

Покажем все эти этапы на решении таких задач.

Задача 1. *Длина Днепра и Дона вместе равна* 4255 *км. Днепр длиннее Дона на* 315 *км. Какова длина Днепра и Дона в отдельности?*

1) В задаче требуется узнать два числа: длину Днепра и длину Дона. Обозначим через x любое из них, например длину Дона. Запишем это:

длина Дона x километров.

2) Другое неизвестное число — длина Днепра. Но в задаче сказано, что Днепр длиннее Дона на 315 *км*. Значит, чтобы вы-

разить длину Днепра, достаточно к длине Дона прибавить 315 *км*. Запишем:

длина Днепра $(x+315)$ километров.

3) В задаче имеется ещё одно данное — общая длина Днепра и Дона. Но мы можем выразить эту общую длину и другим способом, сложив уже выраженные через x длины Дона и Днепра. Запишем:

длина Дона и Днепра вместе $x+(x+315)$ километров.

4) Так как эта общая длина Днепра и Дона по условию задачи равна 4255 *км*, то составляем уравнение.

По условию задачи:

$$x+(x+315)=4255.$$

5) Решив уравнение, найдём $x=1970$.

Итак, длина Дона равна 1970 *км*.

6) В задаче требуется найти ещё длину Днепра. Но она у нас уже записана во втором пункте. Подставив 1970 вместо x, получим:

длина Днепра равна $1970+315=2285$ (*км*).

Задача 2. *Для детского сада купили* 16 *больших и малых мячей, всего на* 244 *руб. Большой мяч стоил* 25 *руб., малый* 12 *руб. Сколько было куплено тех и других мячей в отдельности?*

Решение проведём в таком порядке.

1) Больших мячей куплено x штук.
2) Малых мячей куплено $(16-x)$ штук.
3) Все большие мячи стоили $25x$ рублей.
4) Все малые мячи стоили $12(16-x)$ рублей.
5) Все большие и малые мячи вместе стоили $25x+12(16-x)$ рублей.

По условию:

$$25x+12(16-x)=244.$$

6) Решив уравнение, найдём: $x=4$.
7) Малых мячей куплено $16-4=12$ (шт.).

При решении этой задачи для каждого сорта мячей имелись три зависящих друг от друга величины: число мячей, стоимость одного мяча и стоимость всех мячей. Эта зависимость становится более ясной, а отсюда и составление уравнения будет более лёгким, если весь ход решения записать не по отдельным пунктам, как сделано выше, а в виде таблицы.

Составим такую таблицу:

	Число мячей	Цена одного мяча	Стоимость всех мячей
1. Большие мячи			
2. Малые мячи			

Заполним клетки этой таблицы в таком порядке: 1) записываем в третьем столбце известные цены одного мяча; 2) записываем буквой x во втором столбце число больших или малых мячей; тогда число других мячей запишется через $16-x$; 3) заполняем четвёртый столбец, умножая цену мяча на их число.

Вся таблица заполнена. Остаётся сложить выражения в четвёртом столбце и сумму приравнять 244. Получим уравнение.

Всё решение представится в виде такой записи:

	Число мячей	Цена одного мяча	Стоимость всех мячей
1. Большие мячи	x	25	$25x$
2. Малые мячи	$16-x$	12	$12(16-x)$

По условию: $25x+12(16-x)=244$.

Предлагается решить эту задачу с помощью составления таблицы, обозначив через x число малых мячей.

Задача 3. *На первом складе было* 2300 $м^3$ *дров, на втором* 2800 $м^3$. *Со второго склада взяли впятеро больше дров, чем с первого, и тогда на обоих складах дров стало поровну. Сколько дров взяли с каждого склада?*

Так как в задаче сказано, что дров на обоих складах осталось поровну, то выразим с помощью x остаток дров на каждом складе и приравняем эти остатки.

Решение будет иметь такой вид.

1) С первого склада взяли x $м^3$.
2) Осталось на первом складе $(2300-x)$ $м^3$.
3) Со второго склада взяли $5x$ $м^3$.
4) Осталось на втором складе $(2800-5x)$ $м^3$.
5) По условию:

$$2300-x=2800-5x.$$

6) Решаем уравнение:

$$4x=500;\ x=125.$$

7) С первого склада взято 125 $м^3$.

Со второго склада взято $125\cdot5=625$ ($м^3$).

8) Проверка. $2300-125=2175$; $2800-625=2175$.

Для составления уравнения и здесь очень удобно представить процесс решения в виде таблицы:

	Было	Взяли	Осталось
1-й склад	2300	x	$2300-x$
2-й склад	2800	$5x$	$2800-5x$

По условию: $2300-x=2800-5x$.

§ 67. Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе.

До сих пор мы решали только уравнения, целые относительно неизвестного, то есть уравнения, в которых знаменатели (если таковые имелись) не содержали неизвестное.

Часто приходится решать уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе.

Примеры.

1.
$$\frac{1}{x-3}=2. \qquad (1)$$

Чтобы решить это уравнение, нужно сначала привести его к целому виду. Для этого обе части уравнения придётся умножать на $x-3$, то есть на многочлен, содержащий неизвестное. Будет ли новое уравнение равносильно данному? Чтобы ответить на вопрос, решим это уравнение.

Умножив обе части его на $x-3$, получим:

$$1=2(x-3). \qquad (2)$$

Решив это уравнение первой степени, найдём: $x=3\frac{1}{2}$.

Итак, уравнение (2) имеет единственный корень $x=3\frac{1}{2}$.

Подставив его в уравнение (1), получим:

$$\frac{1}{3\frac{1}{2}-3}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2;\ 2=2.$$

Значит, $x=3\frac{1}{2}$ является корнем и уравнения (1).

Других корней уравнение (1) не имеет. Это видно, например, из того, что в уравнении (1) $x-3$ как неизвестный делитель должен быть равен делимому 1, разделённому на частное 2, то есть:

$$x-3=1:2=\frac{1}{2}.$$

Отсюда:

$$x=\frac{1}{2}+3;\ x=3\frac{1}{2}.$$

Итак, уравнения (1) и (2) имеют единственный корень $x=3\frac{1}{2}$. Значит, они равносильны.

2. Решим теперь такое уравнение:

$$\frac{x+5}{x-1}-\frac{x+1}{x-3}+\frac{8}{(x-1)(x-3)}=0. \qquad (1)$$

Наименьший общий знаменатель: $(x-1)(x-3)$. Умножим на него все члены. После сокращения получим:

$$(x+5)(x-3)-(x+1)(x-1)+8=0.$$

Раскроем скобки:

$$x^2+5x-3x-15-x^2+1+8=0.$$

Приведя подобные члены, будем иметь:

$$2x-6=0. \qquad (2)$$

Решив это уравнение, найдём:

$$x=3.$$

Подставив $x=3$ в уравнение (1), получим:

$$\frac{8}{2}-\frac{4}{0}+\frac{8}{0}=0.$$

В левой части получили выражения, не имеющие смысла.

Значит, $x=3$ корнем уравнения (1) не является. Отсюда следует, что уравнение (1) и (2) неравносильны. Говорят в этом случае, что уравнение (1) от умножения на $(x-1)(x-3)$ приобрело посторонний корень.

Итак, на поставленный выше вопрос приходится ответить только так.

При умножении обеих частей уравнения на многочлен, содержащий неизвестное, ***может получиться уравнение, неравносильное данному.***

Отсюда делаем такой вывод. Если при решении уравнения пришлось умножать обе части его на многочлен, содержащий неизвестное, то все полученные корни надо проверить подстановкой в первоначальное уравнение. Корни, которые ему не удовлетворяют, надо отбросить, как посторонние.

Примеры.

1. $$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x+2}.$$

Предполагаем, что $x \neq 2$ и $x \neq -2$ (эти значения неизвестного не являются допустимыми, так как при этих значениях уравнение теряет смысл).

Общий наименьший знаменатель:

$$(x-2)(x+2)=x^2-4.$$

Умножив на него обе части уравнения и произведя сокращение, получим уравнение:

$$(x+1)(x+2)=(x-3)\ (x-2).$$

Решив его, найдём $x=\frac{1}{2}$. Подстановка в данное уравнение показывает, что $x=\frac{1}{2}$ является и его корнем.

2. $$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}=\frac{12}{x^2-4}. \qquad (1)$$

И здесь общий наименьший знаменатель x^2-4 (причём $x \neq 2$ и $x \neq -2$). Умножив на него обе части уравнения, получим:

$$(x+1)(x+2)-(x-3)(x-2)=12; \qquad (2)$$
$$x^2+3x+2-x^2+5x-6=12;$$
$$8x-4=12; \quad x=2.$$

Итак, уравнение (2) имеет корень $x=2$. Но он является посторонним для уравнения (1), так как 2 не является допустимым значением для x.

Значит, уравнение (1) не имеет решений.

§ 68. Понятие о неравенстве.

Нам уже приходилось пользоваться различными знаками, выражающими неравенство двух чисел или алгебраических выражений (см. главу I, § 2).

Два алгебраических выражения, соединённые знаком $>$ или $<$, образуют неравенство.

Примеры неравенств:

$$5>-2; \quad a+b>c; \quad \frac{x-3}{2}>3x-1;$$

$$-7<-5; \quad x<y; \quad \frac{a+2}{a-1}<2a+5.$$

Если два или больше неравенств имеют одинаковые знаки неравенства, то они называются неравенствами **одинакового смысла.**

Так,

$$-3<1; \quad 3a<2a-1; \quad \frac{1}{5}<\frac{5}{7}$$

являются неравенствами одинакового смысла.

Знаки $>$ и $<$ называются **противоположными** друг другу.

Если два неравенства имеют противоположные знаки неравенства, то они называются неравенствами **противоположного смысла.**

Рассмотрим неравенство

$$a+5>a+1.$$

Подставляя вместо a любые числа, убедимся, что неравенство во всех случаях будет верным. Это и понятно. Представим неравенство в такой форме:

$$a+1+4>a+1.$$

Левая часть содержит то же выражение, что и правая, и ещё слагаемое 4. Значит, какое бы число ни подставить вместо a, всегда левая часть будет на 4 больше правой и, значит, неравенство остаётся всегда верным.

Определение 1. **Неравенство, верное при любых (допустимых) значениях входящих в него букв, называется тождественным неравенством.**

Допустимыми значениями для неравенства будут такие значения, при которых обе части неравенства имеют смысл.

Рассмотрим другое неравенство:

$$x-3>5.$$

Подставив вместо x числа 1, 3, 5, получим неверные неравенства (например, получим, что -2 больше 5, и т. д.).

Но при x, равном 9, $10\frac{1}{2}$, 13 и т. д., будем получать верные неравенства:

$$6>5; \quad 7\frac{1}{2}>5; \quad 10>5 \text{ и т. д.}$$

Значит, это неравенство оказывается верным при одних значениях буквы x и неверным при других.

Определение 2. **Неравенство, верное лишь при некоторых значениях входящих в него букв, называется неравенством, содержащим неизвестные.**

§ 69. Свойства неравенств.

Неравенства обладают некоторыми свойствами, сходными со свойствами равенств. Рассмотрим некоторые из них.

Первое свойство. Возьмём верное неравенство

$$8>3.$$

Прибавим к обеим частям по 1, по 5, по 17. Получим каждый раз верное неравенство:

$$9>4;\ 13>8;\ 25>20.$$

Прибавим к обеим частям любое отрицательное число, например: -1; -5; -8; -17 (или, что то же, вычтем 1; 5; 8; 17). Получим опять верные неравенства:

$$7>2;\quad 3>-2;\ 0>-5;\ -9>-14.$$

Прибавим, наконец, какой-либо многочлен, например $3a-b$. Получим: $8+3a-b>3+3a-b$.

Это неравенство можно переписать так:

$$5+3+3a-b>3+3a-b.$$

Каковы бы ни были значения a и b, в обеих частях получится по равному числу $3+3a-b$, но в левой части есть ещё слагаемое 5. Значит, при всех значениях a и b левая часть будет на 5 больше правой и неравенство остаётся верным при любых значениях a и b.

Если вместо неравенства $8>3$ возьмём какое-либо неравенство противоположного смысла, например:

$$2<7,$$

то, повторив все предыдущие рассуждения, найдём, что и в этом случае неравенство остаётся верным, если прибавить к обеим частям его одно и то же любое число или буквенное выражение.

Итак, первое свойство неравенств заключается в следующем.

Свойство 1. ***Неравенство остаётся верным, если к обеим частям его прибавить одно и то же число или многочлен.***

Коротко это свойство можно записать так.

Если $a>b$, то $a+c>b+c$.

Здесь буквой c обозначено любое рациональное число или многочлен.

Можно было бы также написать: если $a<b$, то $a+c<b+c$.

Так же, как и в случае уравнений, из этого свойства вытекают следствия.

1. ***Любой член неравенства можно перенести из одной части в другую, переменив его знак на противоположный.***

2. ***Если обе части неравенства имеют одинаковые члены, их можно опустить.***

Второе свойство. Возьмём опять какое-либо верное неравенство, например:

$$6<8.$$

Умножим обе части его на любое положительное число a. Получим:

$$6a<8a.$$

Это неравенство тоже верное. Докажем это.

Неравенство $6<8$ мы можем записать так:

$$6<6+2.$$

При умножении обеих частей на любое положительное число a будем иметь:

$$6a<6a+2a.$$

Левая часть равна первому слагаемому в правой части. Но в правой части есть ещё положительное слагаемое $2a$. Значит, вся левая часть будет меньше, чем правая.

Так как деление на какое-либо число (не равное нулю) можно заменить умножением на число, обратное делителю, то неравенство остаётся верным и при делении обеих частей на любое положительное число.

Умножим теперь обе части неравенства $6<8$ на какое-либо отрицательное число, например на -3. Тогда в левой части получится -18, а в правой -24. Но так как -18 больше, чем -24, то полуним:

$$6\cdot(-3)>8\cdot(-3).$$

Неравенство переменило знак, то есть перешло в неравенство противоположного смысла.

То же самое получится и при умножении обеих частей неравенства на любое другое отрицательное число, как это видно из следующих примеров.

Неравенство	Множитель	Новое неравенство
$6<8$	$-\frac{1}{2}$	$-3>-4$
$7>6$	-1	$-7<-6$
$3>-1$	-5	$-15<5$

Наконец, если обе части какого-либо неравенства умножим на нуль, то в обеих частях будет нуль, то есть неравенство перейдёт в равенство $0 = 0$.

Например:
$$5 > 2;$$
$$5 \cdot 0 = 2 \cdot 0; \quad 0 = 0.$$
$$-2 < 3;$$
$$(-2) \cdot 0 = 3 \cdot 0; \quad 0 = 0.$$

Из всего изложенного вытекает следующее второе свойство неравенства.

Свойство 2. ***Неравенство остаётся верным (иногда говорят: не меняет смысла), если обе части его умножить на одно и то же положительное число.***

Неравенство переходит в равенство $0 = 0$, если обе части его умножить на нуль.

Неравенство меняет смысл неравенства на противоположный, если обе части его умножить на одно и то же отрицательное число.

Коротко это второе свойство неравенства можно записать так:

Если $a > b$,

то: ***при*** $c > 0$ $ac > bc$;
при $c = 0$ $ac = bc$;
при $c < 0$ $ac < bc$.

§ 70. Неравенства первой степени с одним неизвестным.

Определение 1. **Неравенствами первой степени с одним неизвестным называются такие неравенства, в которых обе части представляют собой многочлены первой степени относительно неизвестного:**

$$ax + b > cx + d,$$
$$ax + b < cx + d.$$

Примечание. В частности, некоторые из коэффициентов a, b, c, d могут быть нулями, и та или иная часть неравенства может содержать лишь один член или даже оказаться равной нулю, например:

$$5x - 3 > 2; \quad 3x + 1 < x; \quad x + 3 > 0.$$

Только a и c одновременно не могут быть нулями, так как в этом случае мы имели бы просто числовое неравенство.

Решить неравенство — значит определить, при каких значениях неизвестного неравенство будет верным.

Определение 2. **Два неравенства называются равносильными, если каждое из них имеет те же решения, что и другое.**

На основании свойств неравенств, выведенных в предыдущем параграфе, можно доказать следующие свойства неравенств, содержащих неизвестное.

1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число или многочлен относительно неизвестного, то новое неравенство будет равносильно данному.

2. Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то новое неравенство будет равносильно данному.

3. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и переменить знак неравенства на противоположный, то новое неравенство будет равносильно данному.

Мы видим, что свойства неравенств сходны со свойствами уравнений. Поэтому и решение неравенств очень сходно с решением уравнений.

Покажем это на примере.

Решим неравенство:

$$5x-7>3x+1.$$

Сгруппируем члены, содержащие неизвестное, в одной части неравенства, а свободные члены — в другой. Для этого прибавим к обеим частям неравенства $-3x+7$ (первое свойство неравенств). Получим:

$$5x-3x>1+7,$$

или

$$2x>8.$$

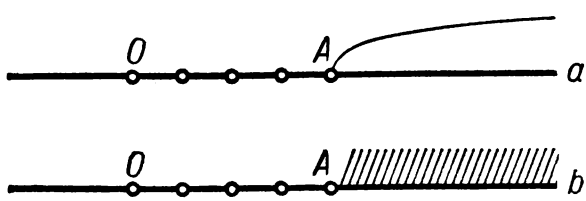
Разделим обе части неравенства на 2 или умножим на $\frac{1}{2}$ (второе свойство неравенств). Получим:

$$x>4.$$

Итак, данное неравенство верно при любом x, большем четырёх.

Найденное решение можно изобразить графически. Возьмём числовую ось и отметим на ней „точку 4".

Пусть это будет точка A (черт. 18).



Черт. 18.

Тогда данному неравенству удовлетворяют все числа, соответствующие точкам, лежащим правее точки A. Для краткости просто говорят: данному неравенству удовлетворяют все точки, лежащие правее точки A. Эту область решений обычно отмечают или дугой, как на чертеже 18a, или штриховкой, как на чертеже 18b.

§ 71. Краткие исторические сведения.

(Из истории уравнений.)

Ещё в глубокой древности в математических сочинениях встречались уравнения, а также задачи, решаемые с помощью уравнений.

Так, в египетском папирусе около 2000 лет до нашей эры (причём, как указывает в нём автор, писец Ахмес, это математическое сочинение является копией с другого, более древнего сочинения) имеются задачи на отыскание неизвестного числа. Это неизвестное называлось „хау" (куча) и обозначалось особым иероглифом.

Вот примеры задач из этого папируса.

1) „Неизвестное, его седьмая часть, его целое составляет 19".

В современном виде задача запишется так:

$$\frac{1}{7}x+x=19.$$

2) „$\frac{2}{3}$ сложено и $\frac{1}{3}$ отнята; остаток 10".

Судя по приведённому в папирусе решению, задачу следует понимать так: к неизвестному прибавлено $\frac{2}{3}$ его и отнята $\frac{1}{3}$ полученной суммы; остаток 10; найти число.

Задача в современном виде запишется так:

$$x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10$$

Ответ. $x=9$.

У Диофанта (III век, см. § 29) также встречаются уравнения с одним неизвестным, например:

„Числа 20 и 100. Нужно одно и то же число прибавить к меньшему и вычесть из большего; отношение суммы к разности равно 4".

Задача приводит к уравнению

$$\frac{20+x}{100-x}=4.$$

В индийской рукописной арифметике VII или VIII века нашей эры, являющейся копией с более древней рукописи (III—IV век), имеется такая задача:

„Из четырёх жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий втрое больше второго, четвёртый вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132. Сколько дал первый?"

Получаем уравнение:

$$x+2x+6x+24x=132.$$

В рукописи задача решается способом „ложного положения". (Этим способом пользовался и Л. Ф. Магницкий в своей „Арифметике".)

„Если бы первый дал 1, то второй дал бы 2, третий 6, четвёртый 24, а все вместе 33. Но всего было дано 132, то есть вчетверо больше. Значит, и каждый из жертвователей дал вчетверо больше".

Ответ. 4; 8; 24; 96.

Но общее правило для решения уравнений первой степени с одним неизвестным дал в IX веке Мухаммед Аль-Хорезми.

В своём сочинении „Аль-джебр и аль-мукабала" он даёт два приёма, применяемые при решении уравнений.

Приём „аль-джебр" заключается в том, что если имеются в уравнении отрицательные (вычитаемые) члены, то их следует прибавить к обеим частям уравнения, и тогда все члены будут положительными.

Приём „аль-мукабала" заключается в вычитании из обеих частей уравнения одинаковых членов, что приводит к его упрощению.

Пусть, например, дано уравнение:

$$5x - 17 = 2x - 5.$$

Применяем „аль-джебр": прибавляем к каждой части уравнения 5 и 17. Получим:

$$5x + 5 = 2x + 17.$$

Применяем „аль-мукабала": вычитаем из каждой части $2x$ и 5. Получим:

$$3x = 12.$$

Отсюда легко находится x.

Появление этого замечательного сочинения Аль-Хорезми можно считать началом выделения алгебры как самостоятельной, отдельной отрасли математики.

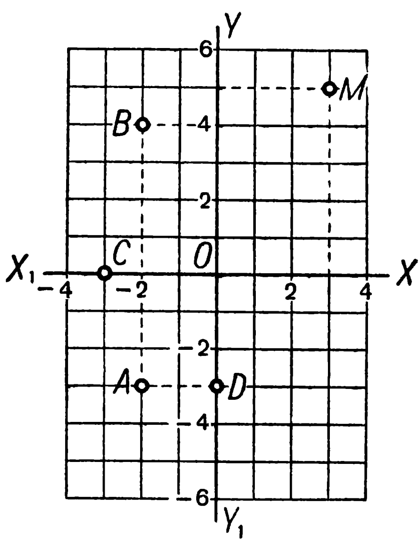
Самое название „алгебра" взято из заглавия этого сочинения („Аль-джебр").

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ.

§ 72. Координаты точки на плоскости.

Проведём на плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси XX_1 и YY_1 (черт. 19). Точку их пересечения O будем считать „нулевой“ точкой для обеих осей. Как и раньше, положительные числа будут изображаться на горизонтальной оси точками вправо, а на вертикальной оси — точками вверх от нулевой точки. Отрицательные числа будут изображаться точками влево и вниз от нулевой точки.



Черт. 19.

Возьмём на плоскости произвольную точку M и проведём из неё перпендикуляры к осям. Концы этих перпендикуляров отметят на осях точки, изображающие определённые числа. Эти два числа мы будем считать соответствующими точке M. На чертеже 19 это числа 3 и 5.

Точке A на чертеже 19 соответствует пара чисел: -2 и -3, точке B — числа -2 и 4.

Определение. **Числа, определяющие положение точки на плоскости, называются её координатами.**

Значит, числа 3 и 5 являются координатами точки M, числа -2 и -3 являются координатами точки A и т. д.

Числовые оси, которыми мы пользовались для определения положения точки на плоскости, будем теперь называть осями координат.

Чтобы отличить координаты, отсчитываемые на горизонтальной оси, от координат, отсчитываемых на вертикальной оси, им дали особые названия.

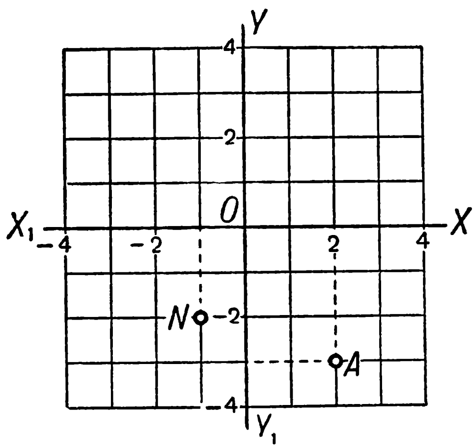
Координата, отсчитываемая на горизонтальной оси, называется абсциссой; координата, отсчитываемая на вертикальной оси,— ординатой. Соответственно этому, горизонтальную ось называют осью абсцисс, а вертикальную — осью ординат.

Координаты точки записываются в скобках справа от обозначения точки. Первой записывается абсцисса, а за ней ордината.

Так, запись M (3; 5) означает, что абсцисса точки M равна трём, а ордината — пяти.

Рассмотрим некоторые особые положения точки.

Если точка лежит на оси абсцисс, то, очевидно, её ордината равна нулю. Так, например, точка C на чертеже 19 имеет координаты — 3 и 0.



Черт. 20

Если точка лежит на оси ординат, то её абсцисса равна нулю, например точка D (0; — 3) (черт. 19).

Наконец, начало координат — точка O — имеет и абсциссу и ординату, равные нулю: O (0; 0).

Задача 1. *Построить точку по данным её координатам, например построить точку A (2; — 3).*

Решение. На оси абсцисс (черт. 20) находим точку 2 и проводим из неё перпендикуляр к этой оси. На оси ординат находим точку —3 и проводим из неё перпендикуляр к этой оси. Пересечение перпендикуляров и даст искомую точку A.

Примечание. Если оси координат не даны, то построение производим так:

Проводим две взаимно перпендикулярные прямые. Принимаем произвольный отрезок за единицу и откладываем от начала по оси абсцисс 2 единицы вправо, а по оси ординат 3 единицы вниз. Из полученных точек проводим перпендикуляры к осям. Пересечение перпендикуляров и даст искомую точку A (2; —3).

Задача 2. *На плоскости даны оси координат и произвольная точка N. Определить её координаты.*

Решение ясно из самого определения координат точки. Проводим из заданной точки перпендикуляры к осям координат. Основания этих перпендикуляров и определят её координаты.

Так, на чертеже 20 заданная точка N имеет координаты $(-1; -2)$.

§ 73. Уравнение с двумя неизвестными.

Задача 1. *Два ученика купили вместе* 6 *тетрадей. Сколько тетрадей купил каждый?*

Сразу видно, что на вопрос задачи дать определённый ответ нельзя. Действительно, задача требует лишь, чтобы общее число тетрадей у обоих учеников было равно 6. Это условие выполняется, если, например, один ученик купил 1, а другой 5 тетрадей. Но оно выполняется также, если один купит 2, а другой 4 тетради, если оба купят по 3 тетради и т. д.

Итак, задача допускает не одно, а несколько решений. Говорят в этом случае, что задача неопределённая.

Найдём все возможные решения этой задачи с помощью уравнения.

Обозначим число тетрадей, купленных первым учеником, через x, а число тетрадей, купленных вторым учеником, через y.

По условию задачи будем иметь:

$$x+y=6.$$

Здесь два неизвестных числа x и y, а потому и уравнение $x+y=6$ называется уравнением с двумя неизвестными.

Каждая пара допустимых значений x и y, подстановка которых в уравнение обращает его в верное равенство, будет решением этого уравнения.

Если мы дадим x одно из допустимых значений, то, подставив его в данное уравнение, найдём соответствующее значение y.

Все возможные решения можно представить в виде следующей таблицы:

У I ученика	x	1	2	3	4	5
У II ученика	y	5	4	3	2	1
Всего	$x+y$	6	6	6	6	6

Итак, мы получили 5 различных решений и, значит, 5 различных ответов на вопрос задачи.

Возьмём теперь другую задачу, сходную с первой.

Задача 2. *Два куска меди весят вместе* 6 *кг. Сколько весит каждый кусок?*

Решение и здесь приводит к уравнению

$$x+y=6,$$

но решений у этого уравнения будет уже гораздо больше.

Действительно, в первом уравнении допустимыми значениями для неизвестных были только натуральные числа и притом не бóльшие пяти (по смыслу задачи каждый ученик купил хотя бы одну тетрадь). Во второй же задаче допустимыми являются любые положительные (целые и дробные) числа, меньшие шести.

Давая одному из неизвестных, например x, произвольное допустимое значение, мы найдём соответствующее значение и для y. Каждая пара этих значений будет решением уравнения и ответом на вопрос задачи. Легко видеть, что число решений этого уравнения бесконечно велико.

Часть этих решений приведена в следующей таблице:

В I куске	x	2	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{2}{5}$	5,4
Во II куске	y	4	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{5}$	0,6
В обоих	$x+y$	6	6	6	6

Наконец, возьмём такую задачу.

Задача 3. *Сумма двух чисел равна* 6. *Чему равно каждое слагаемое?*

Задача опять приводит к уравнению

$$x+y=6.$$

Но здесь допустимыми значениями для неизвестных будут уже любые рациональные числа, например:

x	6	8	-15	11,3
y	0	-2	21	$-5,3$
$x+y$	6	6	6	6

Как видим, и это уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, во всех трёх задачах уравнение не давало определённого ответа на вопрос задачи. Оно лишь указывало на определённую зависимость между двумя неизвестными величинами. На основании этой зависимости, зная значение одного неизвестного, мы могли определить значение и другого.

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы.

1. Уравнение с двумя неизвестными выражает зависимость между двумя величинами.

2. Уравнение с двумя неизвестными имеет, вообще говоря бесчисленное множество решений.

Исключением является, например, уравнение к первой задаче, которое по смыслу задачи допускало только пять решений. Могут быть и уравнения с двумя неизвестными, допускающие лишь одно решение.

Задача 4. *Кассир должен дать сдачи* 19 *коп. У него имеются монеты только в* 3 *коп. и в* 5 *коп. Сколько он должен сдать тех и других монет?*

Если число трёхкопеечных монет обозначим через x, а число пятикопеечных через y, то получим уравнение:

$$3x+5y=19.$$

Предлагаем проверить, что уравнение имеет только одно решение: $x=3$, $y=2$ (принять во внимание допустимые значения неизвестных).

Наконец, уравнение с двумя неизвестными может не иметь ни одного решения. Таково, например, уравнение:

$$x^2+2y+5=x^2+2y.$$

Но такие случаи встречаются редко.

§ 74. Графическое изображение уравнения с двумя неизвестными.

В § 72 мы строили точки на плоскости по их координатам. При этом обе координаты задавались произвольно, независимо одна от другой.

Но можно поставить и такую задачу: построить все точки, координаты которых связаны определённой зависимостью. Например, ордината каждой точки должна быть втрое более её абсциссы, что можно выразить уравнением:

$$y=3x,$$

или чтобы ордината каждой точки была на 3 единицы меньше её абсциссы. Эта зависимость выражается уравнением:

$$y = x - 3.$$

Построим для примера точки, координаты которых связаны такой зависимостью: сумма абсциссы и ординаты каждой точки равна 6. Эта зависимость выражается уравнением:

$$x + y = 6.$$

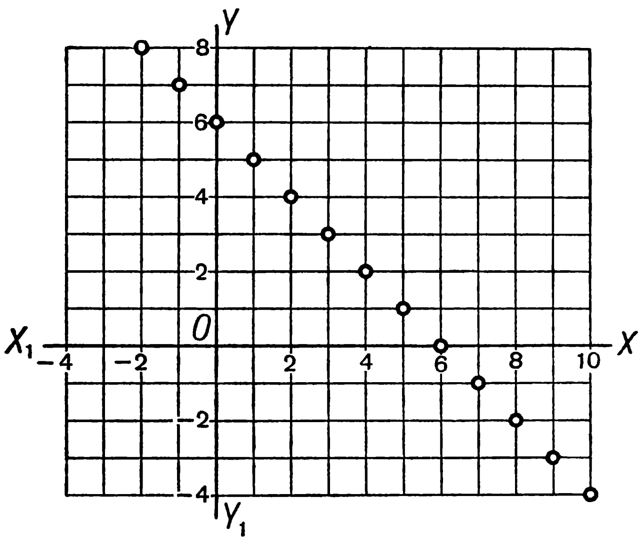
Будем давать одной из координат, например x, произвольные значения. Соответствующие значения y вычислим по формуле, выведенной из уравнения:

$$y = 6 - x.$$

Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	3	5	6	7	8	9
y	8	7	6	5	3	1	0	-1	-2	-3

Построим соответствующие точки (черт. 21). Ясно видно, что все построенные точки лежат на одной прямой.



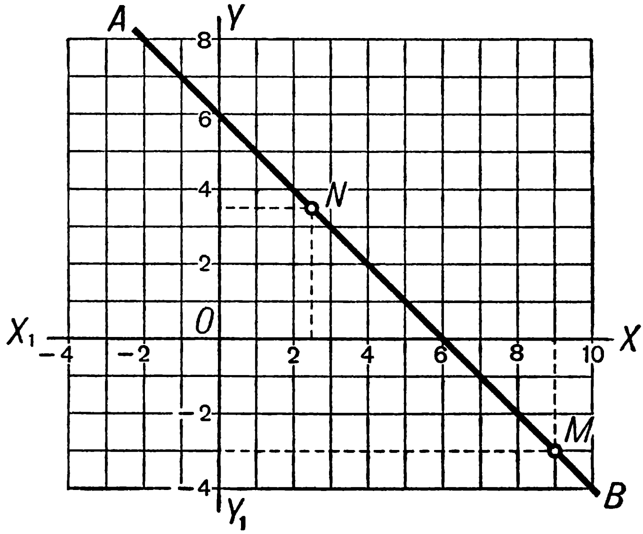
Черт. 21.

Если будем давать x дробные значения между, например, 0 и 1, между 7 и 8 и т. п., то новые точки расположатся на той же прямой между уже построенными точками.

Проведём эту прямую (черт. 22).

Можно доказать, что:

1) Каждое решение уравнения изобразится точкой, лежащей на той же прямой AB. Например, $x=9$, $y=-3$ является



Черт. 22.

решением уравнения $x+y=6$. Построением убеждаемся, что точка M (9; —3) лежит на прямой AB.

2) Координаты каждой точки, лежащей на прямой AB, являются решением уравнения $x+y=6$.

Например, координаты точки N: $x=2\frac{1}{2}$, $y=3\frac{1}{2}$ — являются решением этого уравнения.

Прямая AB называется **графиком** или **графическим изображением** уравнения $x+y=6$, а построение этого графика называется **графическим решением** этого уравнения.

Возьмём ещё уравнение

$$x^2+y=9$$

и построим его график. Имеем:

$$y=9-x^2.$$

Составим таблицу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7

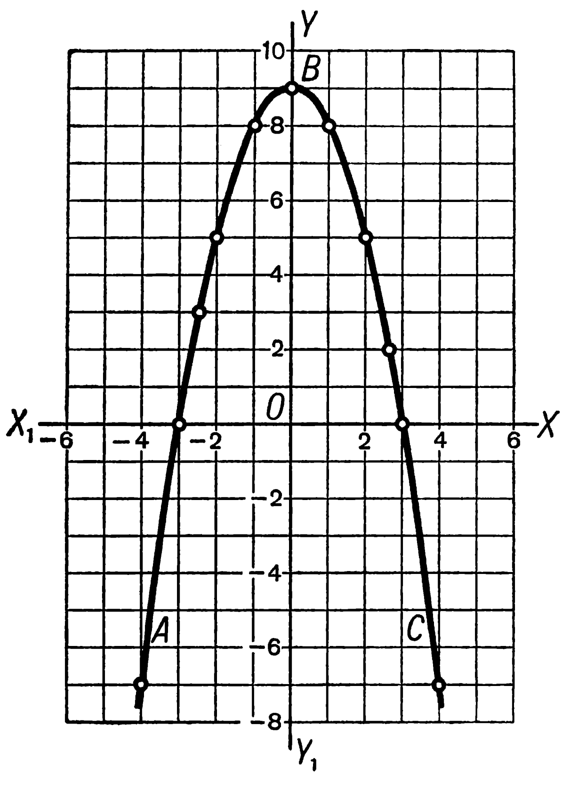
Построим соответствующие точки (черт. 23). Сразу видно, что точки уже не расположены на одной прямой. Если будем давать x дробные значения, то соответствующие точки расположатся между уже построенными. При всевозможных изменениях значений x точки расположатся на некоторой кривой ABC (черт. 23), которая называется параболой и о которой будет сказано более подробно во второй части этого курса.

И здесь все решения уравнения

$$x^2 + y = 9$$

изобразятся точками, лежащими на кривой ABC, и наоборот, координаты каждой точки кривой ABC являются решением уравнения

$$x^2 + y = 9.$$



Черт. 23.

Значит, кривая ABC является графиком уравнения $x^2 + y = 9$, и её построение является графическим решением этого уравнения.

§ 75. Прямо пропорциональная зависимость.

1. Определение прямо пропорциональной зависимости. В арифметике уже изучались прямо пропорциональные величины.

Приведём примеры таких величин.

1) Путь (при равномерном движении) и время, в течение которого этот путь пройден.

Пусть скорость равномерного движения равна 3 *км* в час. Обозначим длину пройденного пути через y, а число часов, за которое этот путь пройден, через x; тогда зависимость между этими двумя величинами выразится уравнением:

$$y = 3x.$$

2) Стоимость отреза материи и число метров в отрезе.

Пусть 1 *м* материи стоит 8 руб. Тогда, если обозначить через x число метров в отрезе, а через y стоимость всего отреза, зависимость между этими двумя величинами можно выразить уравнением

$$y = 8x.$$

3) Длина окружности и длина её диаметра.

Известно, что для определения длины любой окружности надо длину её диаметра умножить на некоторое число, одно и то же для всех окружностей и приблизительно равное 3,14.

Значит, зависимость между длиной окружности и длиной её диаметра можно (приблизительно) выразить уравнением:

$$y = 3{,}14x,$$

где x — длина диаметра, а y — длина окружности.

Из рассмотренных уравнений получим:

$$\frac{y}{x} = 3; \quad \frac{y}{x} = 8; \quad \frac{y}{x} = 3{,}14.$$

Эти равенства показывают, что при всех изменениях прямо пропорциональных величин отношение их соответственных значений всегда остаётся одним и тем же. В первом примере оно равно 3, во втором 8 и в третьем 3,14.

Из приведённых примеров можно сделать следующий вывод.

Если две величины прямо пропорциональны, то значение одной из них так зависит от значения другой, что при любом значении одной величины, например x, соответствующее значение y будет равно этому значению x, умноженному каждый раз на одно и то же число.

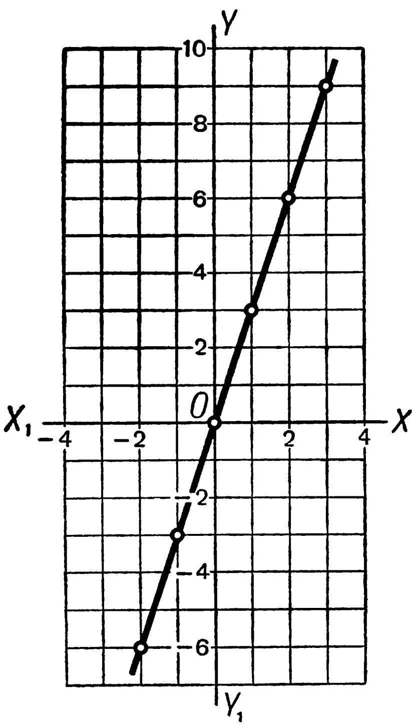
Такая зависимость называется прямо пропорциональной зависимостью.

Поэтому можно дать следующее определение прямо пропорциональной зависимости.

Определение. **Зависимость между двумя величинами, выражаемая уравнением $y = kx$, где k — определённое число (не равное нулю), называется прямо пропорциональной зависимостью.**

Число k называется коэффициентом пропорциональности. В первом примере $k = 3$, во втором $k = 8$, в третьем $k = 3{,}14$.

В предыдущих примерах x и y могли принимать только положительные значения. Теперь, дав общее определение прямо пропорциональной зависимости для любых двух величин, мы можем снять это ограничение. В дальнейшем x, а следовательно, и y могут принимать любые значения.



Черт. 24.

2. График прямо пропорциональной зависимости. Построим график уравнения:

$$y = 3x.$$

Часть этого графика для положительных значений x нами была уже построена в § 27. Теперь мы можем дополнить его точками, которые получатся при отрицательных значениях x и при $x = 0$.

Имеем:

x	0	-1	-2	-3
y	0	-3	-6	-9

Построив эти точки и соединив их (учитывая промежуточные значения x), получим график, изображённый на чертеже 24.

Итак, графиком прямо пропорциональной зависимости, выраженной уравнением $y = 3x$, является прямая, проходящая через начало координат.

Заметим: чему бы ни был равен коэффициент пропорциональности, при $x = 0$ всегда получим $y = 0$. Это значит, что точка

O (0; 0), то есть начало координат, лежит на всех графиках прямо пропорциональной зависимости.

Из приведённых примеров можем сделать такой вывод.

Графиком прямо пропорциональной зависимости является прямая, проходящая через начало координат.

Установив это, мы можем теперь строить график прямой пропорциональности гораздо проще и легче, чем строили до сих пор.

Для примера построим график уравнения:

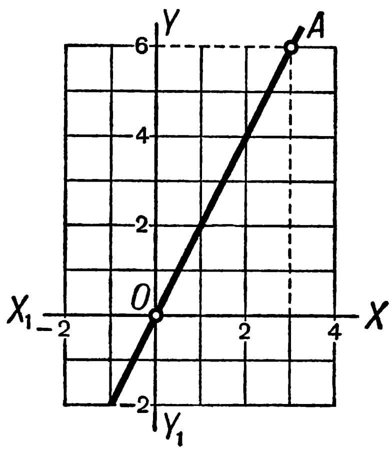
$$y = 2x.$$

Мы знаем, что графиком этого уравнения должна быть прямая, проходящая через начало координат.

Но из геометрии известно, что прямая вполне определяется двумя своими точками. Значит, чтобы построить прямую, достаточно знать две её точки.

Одну точку, через которую должен проходить график уравнения $y = 2x$, мы уже знаем; это точка O (0; 0) — начало координат.

Чтобы найти вторую точку, дадим в данном уравнении величине x произвольное значение, например $x = 3$. (Лучше взять число, не очень близкое к нулю, чтобы получить точку, не очень близкую к началу координат; тогда чертёж будет точнее.) Получим $y = 6$. Итак, точка A (3; 6) лежит на искомой прямой. Построив эту точку, проведём через неё и через начало координат прямую (черт. 25).



Черт. 25.

Эта прямая и будет графиком уравнения $y = 2x$ или, что то же, графиком прямой пропорциональности, выраженной уравнением $y = 2x$.

§ 76. Обратно пропорциональная зависимость.

1. Определение обратно пропорциональной зависимости. Наряду с прямо пропорциональными величинами в арифметике рассматривались также и величины обратно пропорциональные.

Приведём примеры.

1) Длина основания и высоты прямоугольника при постоянной площади.

Пусть требуется выделить для огорода прямоугольный участок площадью в 600 *кв. м*.

Мы можем произвольно установить, например, длину участка. Но тогда ширина участка будет зависеть от того, какую длину мы выбрали. Различные значения длины и ширины приведены в таблице.

Длина в метрах	20	30	40	50	60
Ширина в метрах	30	20	15	12	10
Площадь в квадратных метрах	600	600	600	600	600

Вообще, если обозначить длину участка через x, а ширину через y, то зависимость между ними можно выразить уравнением:

$$xy = 600.$$

Выразив y через x, получим:

$$y = \frac{600}{x}.$$

Давая x произвольные значения, будем получать соответствующие значения y.

2) Время и скорость равномерного движения при определённом расстоянии.

Пусть расстояние между двумя городами равно 200 *км*. Чем больше будет скорость движения, тем меньше времени потребуется, чтобы проехать данное расстояние. Это видно из следующей таблицы:

Скорость в километрах в час	10	20	40	50	80
Время в часах	20	10	5	4	$2\frac{1}{2}$
Путь в километрах	200	200	200	200	200

Вообще, если обозначить скорость через x, а время движения через y, то зависимость между ними выразится уравнением:

$$xy = 200.$$

На основании этих примеров дадим такое определение обратно пропорциональной зависимости.

Определение. **Зависимость между двумя величинами, выражаемая уравнением $xy = k$, где k — определённое число (не равное нулю), называется обратно пропорциональной зависимостью.**

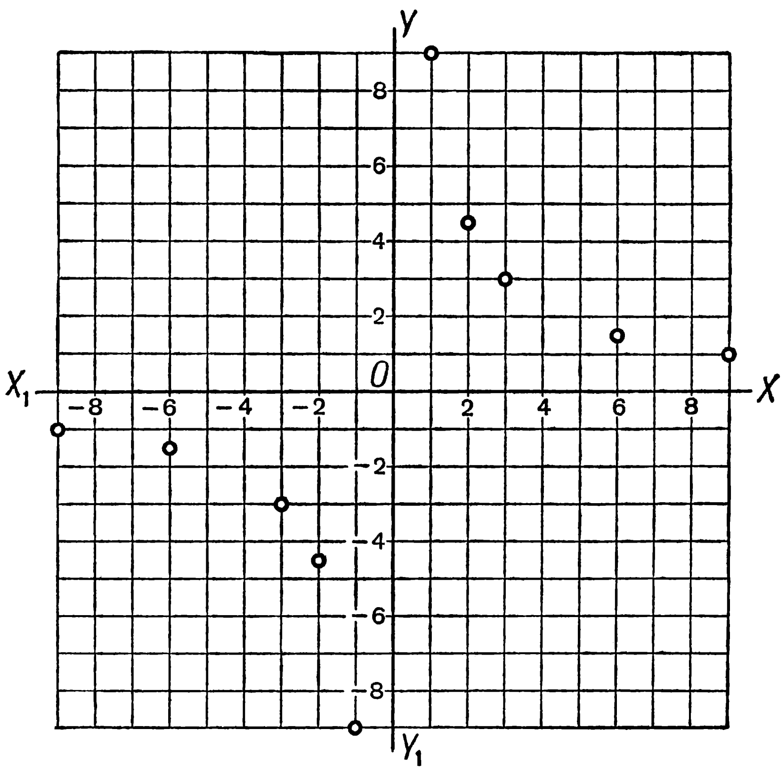
Число k и здесь называется коэффициентом пропорциональности.

Так же, как и в случае прямой пропорциональности, в уравнении $xy = k$ величины x и y в общем случае могут принимать положительные и отрицательные значения.

Но во всех случаях обратной пропорциональности ни одна из величин не может быть равной нулю. В самом деле, если хоть одна из величин x или y будет равна нулю, то в уравнении $xy = k$ левая часть будет равна нулю, а правая — некоторому числу, не равному нулю по определению. Получим неверное равенство.

2. График обратно пропорциональной зависимости. Построим график уравнения:

$$xy = 9.$$



Черт. 26.

Выразив y через x, получим:

$$y=\frac{9}{x}.$$

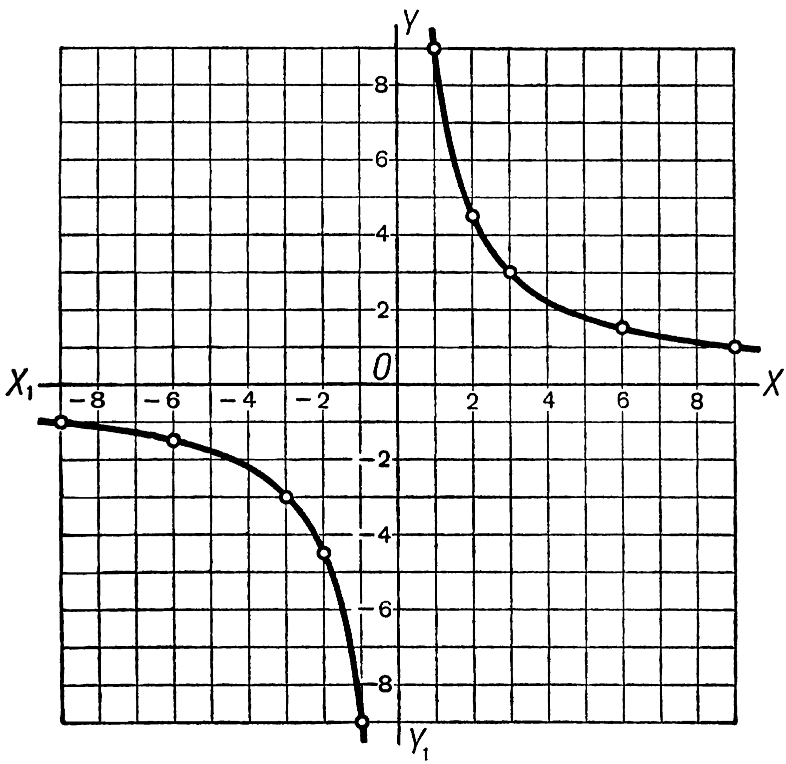
Будем давать x произвольные (допустимые) значения и вычислим соответствующие значения y. Получим таблицу:

x	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9
y	-1	$-1\frac{1}{2}$	-3	$-4\frac{1}{2}$	-9	9	$4\frac{1}{2}$	3	$1\frac{1}{2}$	1

Построим соответствующие точки (черт. 26).

Если будем брать значения x через меньшие промежутки, то и точки расположатся теснее.

При всевозможных изменениях x точки расположатся на двух кривых, симметричных относительно начала координат (черт. 27).



Черт. 27.

Итак, мы видим, что графиком обратной пропорциональности будут две кривые линии. Одна получится при положительных, другая при отрицательных значениях x.

Обе эти линии образуют одну геометрическую фигуру, называемую гиперболой.

Итак:

Графиком обратно пропорциональной зависимости является гипербола.

Как видим, график обратно пропорциональной зависимости гораздо сложнее графика прямо пропорциональной зависимости. Там достаточно было построить две точки, чтобы с помощью линейки построить весь график.

Здесь с помощью линейки нельзя построить никакой хотя бы очень малой части графика, так как никакая часть его не совпадает с прямой.

Поэтому здесь приходится строить возможно больше точек, чтобы получить более точный график.

С достаточно большой точностью гиперболу можно начертить, пользуясь, например, лекалами.

§ 77. Линейная зависимость.

1. Определение линейной зависимости.

Задача. *Пионерский отряд отправился из города в поход. Сейчас он находится в* 5 *км от города и идёт со скоростью* 3 *км в час. На каком расстоянии от города он будет через* x *часов?*

Решение. За x часов отряд пройдёт $3x$ километров. Да ещё ранее он прошёл 5 *км*. Значит, через x часов расстояние от города будет равно $(3x+5)$ километров. Обозначив это расстояние через y, будем иметь:

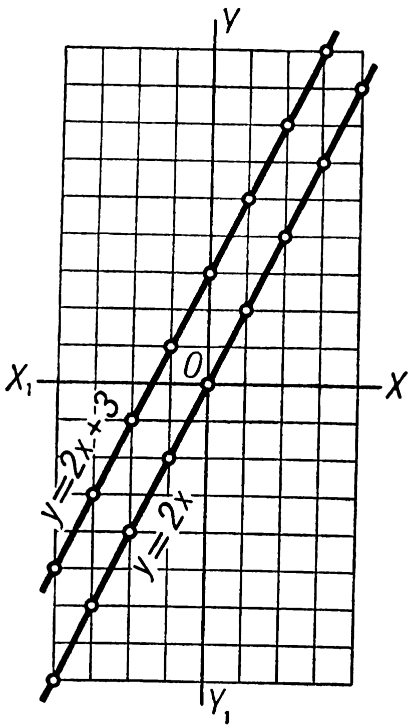
$$y=3x+5.$$

Это уравнение выражает зависимость пути от времени, но это уже не будет прямо пропорциональная зависимость, как легко видеть из следующей таблицы:

x	1	2	4
y	8	11	17

Отношение пути ко времени здесь не равно одному и тому же числу. Такая зависимость называется линейной.

Определение. **Зависимость между двумя величинами, выражаемая уравнением $y=kx+b$, где k и b — определённые числа, называется линейной зависимостью ($k\neq0$).**



Черт. 28.

В частности, если $b=0$, то уравнение примет вид: $y=kx$.

Значит, прямо пропорциональная зависимость является частным случаем линейной зависимости.

2. График линейной зависимости. Построим график линейной зависимости, выраженной, например, уравнением:

$$y=2x+3.$$

Поступим следующим образом. Построим сначала график уравнения:

$$y=2x.$$

Это будет, как мы знаем, прямая, проходящая через начало координат (черт. 28).

Посмотрим, как будут расположены относительно этой прямой точки графика уравнения $y=2x+3$.

Для этого вычислим ординаты точек для обоих уравнений при одной и той же абсциссе.

Получим следующую таблицу:

x	-2	-1	0	1	2	3
$2x$	-4	-2	0	2	4	6
$2x+3$	-1	1	3	5	7	9

Мы видим, что при любой абсциссе ордината точки второго графика на 3 больше ординаты точки первого графика. Значит, и соответствующая точка второго графика будет на 3 единицы выше точки первого.

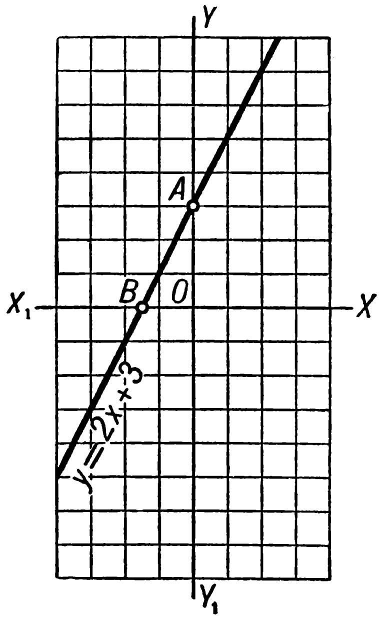
Построив эти точки, получим прямую, параллельную первой прямой (черт. 28).

Графиком линейной зависимости является прямая.

Отсюда следует (как и в § 75), что для построения графика линейной зависимости достаточно найти две его точки.

Покажем это на построении графика уравнения $y = 2x + 3$.

Положим, в этом уравнении $x = -1$. Получим $y = 1$. Итак, одну точку $(-1; 1)$ мы нашли. Положим теперь $x = 2$. Получим $y = 7$. Вторая точка $(2; 7)$. Построив эти точки и проведя через них прямую, получим график уравнения $y = 2x + 3$, то есть график линейной зависимости, выраженной уравнением $y = 2x + 3$.



Черт. 29.

Обычно, для построения графика линейной зависимости берут две точки, в которых прямая пересекает оси координат. Так, полагая в уравнении $x = 0$ получим $y = 3$. Полагая $y = 0$, получим $x = -\frac{3}{2}$. Проведя прямую через точки A $(0; 3)$ и B $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, получим искомый график (черт. 29).

§ 78. Уравнение первой степени с двумя неизвестными.

Если в уравнении с двумя неизвестными каждый член содержит только одно из неизвестных и притом в первой степени или же является свободным членом (то есть совсем не содержит неизвестных), то такое уравнение называется уравнением первой степени с двумя неизвестными.

Примеры таких уравнений:

1) $5x - 2x + 3 = 2x + y - 1$; 2) $8x - 1,3y = 15$;

3) $y = 1,7x$; 4) $y = 4x - 9$; 5) $\frac{x}{3} - 3 = \frac{7y}{5}$.

Примеры третий и четвёртый показывают, что рассмотренные нами ранее уравнения, выражающие прямо пропорциональную и линейную зависимости, являются уравнениями первой степени с двумя неизвестными.

Наоборот, уравнение, выражающее обратно пропорциональную зависимость, например:

$$xy = 8,$$

уже не является уравнением первой степени.

Для уравнений первой степени с двумя неизвестными остаются справедливыми те свойства, которые были установлены для уравнений с одним неизвестным (§ 62 и 63).

1. ***Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или многочлен от неизвестных, то новое уравнение будет равносильно данному.***

Так, уравнения:

$3x - y = 5 - 2x$ и $3x - y + 8 = 13 - 2x$ будут равносильны.

Точно так же будут равносильны и уравнения:

$$2x - 5y = 8 - 10y \text{ и } 2x + 5y = 8,$$

так как второе получено путём прибавления к обеим частям $10y$. Отсюда видно, что справедливо будет и следствие из первого свойства.

Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, переменив его знак на противоположный.

2. ***Если обе части уравнения умножить на одно и то же число, не равное нулю, то новое уравнение будет равносильно данному.***

Отсюда следует, что если уравнение содержит дробные коэффициенты, то их можно привести к целому виду, умножив все члены на общее кратное их знаменателей (обычно на наименьшее общее кратное).

Конечно, обе части уравнения можно и разделить на одно и то же число (не равное нулю), так как это равносильно умножению на число, обратное делителю.

На основании этих свойств всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными можно привести к так называемому нормальному виду.

Покажем это на примере уравнения:

$$\frac{7x}{6} - \frac{5y - 3}{4} + 1 = \frac{3}{8}x - y + 1\frac{7}{12}.$$

Умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей 24 (одновременно раскроем скобки во втором выражении в левой части).

Получим:

$$28x - 30y + 18 + 24 = 9x - 24y + 38.$$

Перенесём все члены, содержащие неизвестные, в левую часть, а свободные члены — в правую:

$$28x - 30y - 9x + 24y = 38 - 18 - 24.$$

Приведём подобные члены:

$$19x - 6y = -4.$$

Полученное выражение и есть нормальный вид уравнения.

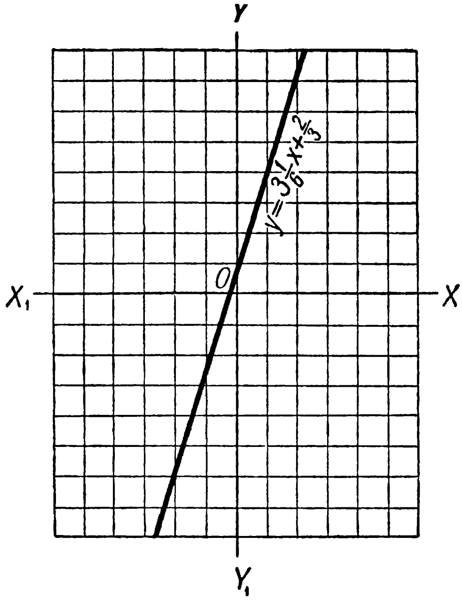
Значит, уравнение, приведённое к нормальному виду, содержит в левой части два члена — один с первым, другой со вторым неизвестным, а правая часть содержит только один свободный член.

Поставим вопрос о графическом изображении уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Мы уже видели, что в случае прямо пропорциональной и линейной зависимости, выражающейся уравнением первой степени с двумя неизвестными, графиком их является прямая линия. Покажем, что прямая линия будет графиком и любого уравнения первой степени с двумя неизвестными. Начнём с примера.

Возьмём уравнение

$$19x - 6y = -4.$$



Черт. 30.

Выразим в нём неизвестное y через x. Получим:

$$6y = 19x + 4; \quad y = 3\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $y = kx + b$ предыдущего параграфа, видим, что оно представляет собой не что иное, как уравнение, выражающее линейную зависимость при $k = 3\frac{1}{6}$ и $b = \frac{2}{3}$.

Значит, графиком и этого уравнения является прямая линия (черт. 30). А так как всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными можно представить в форме уравнения $y = kx + b$, то отсюда следует вывод.

Графиком уравнения первой степени с двумя неизвестными является прямая.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

§ 79. Системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Пусть даны два уравнения с двумя неизвестными, например:

$$x+2y=13;$$
$$3x-y=4.$$

Каждое из них имеет бесчисленное множество решений.

Поставим вопрос: среди всех этих решений не будут ли общие для обоих уравнений?

Такие общие решения могут быть, а могут и не быть.

Так, общим решением данных уравнений будет $x=3$, $y=5$, что легко проверить подстановкой. (Дальше будет показано, что других общих решений эти уравнения не могут иметь.)
А, например, уравнения

$$x+2y=15;$$
$$x+2y=7$$

не имеют ни одного общего решения. В самом деле, какие бы значения мы ни давали x и y, выражение $x+2y$ не может одновременно равняться 15 и 7. Поэтому ни одно решение первого уравнения не может быть решением второго и ни одно решение второго уравнения не может быть решением первого.

Если отыскиваются общие решения двух или нескольких уравнений, то говорят, что эти уравнения образуют систему.

Значит, в системе уравнений каждое неизвестное означает одно и то же число во всех уравнениях системы.

Решить систему уравнений — это значит найти общие решения для всех уравнений системы (если эти решения имеются).

§ 80. Равносильные системы.

Определение. **Две системы уравнений называются равносильными (эквивалентными), если все решения каждой из них являются решениями и другой.**

При решении системы уравнений, как и при решении уравнений с одним неизвестным, приходится переходить от данной системы к другой, более простой, от неё к третьей и так далее, пока не получится простейшая система вида

$$\begin{cases} x=a, \\ y=b, \end{cases}$$

из которой сразу определяются значения неизвестных.

Возникает вопрос: будут ли все системы, которыми заменяется данная система, равносильны ей? Ведь только в этом случае мы можем быть уверены, что полученные решения будут решениями и данной системы уравнений.

И теория, и опыт показывают, что после преобразования не всегда получается система, равносильная данной.

Укажем на некоторые преобразования, после которых можно быть уверенным, что новая система будет равносильна данной.

1. ***Можно любое из уравнений системы заменить равносильным ему уравнением.***

Например, системы:

$$\begin{cases} 2x-3y=4; \\ 3x+2y=19 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x-6y=8; \\ 9x+6y=57 \end{cases}$$

равносильны, так как первое и второе уравнения первой системы заменены равносильными (§ 78, п. 2).

Если имеем два уравнения $A=C$ и $B=D$, то уравнение $A+B=C+D$ обычно называют суммой, а уравнение $A-B=C-D$ — разностью данных уравнений.

2. ***Можно любое из уравнений системы заменить суммой или разностью данных уравнений.***

Например, системы:

$$\begin{cases} 4x-6y=8; \\ 9x+6y=57 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 13x=65; \\ 4x-6y=8 \end{cases}$$

будут равносильны, так как первое уравнение второй системы является суммой уравнений первой системы. (Так как $9x+6y=57$, то, прибавляя к левой части первого уравнения $9x+6y$, а к правой 57, мы фактически прибавляем к обеим частям одно и то же число 57.)

3. ***Можно из одного уравнения системы выразить какое-либо неизвестное через другое и подставить это выражение во второе уравнение. Новое уравнение вместе с первым образуют систему, равносильную данной.***

Например, системы:

$$\begin{cases} 2x+3y=23; \\ x-2y=\ 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2(2y+1)+3y=23; \\ x=2y+1 \end{cases}$$

равносильны (в первом уравнении x заменено равным ему выражением $2y+1$).

§ 81. Решение систем уравнений.

Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными может быть решена несколькими различными способами.

Здесь мы на примерах покажем три из этих способов.

1. Способ алгебраического сложения.

Примеры.

1. Решим систему:

$$\begin{cases} 5x-3y=17; \\ 2x+3y=11. \end{cases}$$

Коэффициенты при y в обоих уравнениях одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку. Поэтому, если вместо, например, первого уравнения возьмём сумму данных уравнений, то в этой сумме члены, содержащие неизвестное y, взаимно уничтожатся. Получим систему:

$$\begin{cases} 7x=28; \\ 2x+3y=11. \end{cases}$$

Эта система равносильна данной (§ 80, п. 2). Но в ней первое уравнение содержит только одно неизвестное x.

Решив его, найдём $x=4$.

Подставив это значение x во второе уравнение, получим уравнение с одним неизвестным:

$$8+3y=11,$$

решив которое, получим $y=1$.

Итак, решением данной системы будет пара чисел:

$$x=4, \quad y=1.$$

Примечание. Обычно, сложив уравнения и получив $7x=28$, второе уравнение не переписывают, а, найдя из полученного уравнения $x=4$, подставляют его в одно из данных уравнений и находят значение другого неизвестного.

2. Дана система:

$$\begin{cases} 3x+5y=21; \\ 3x-2y=0. \end{cases}$$

Предлагается решить эту систему, заменив одно из уравнений разностью данных уравнений.

3. Решим систему:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 2; \\ 6x - 11y = 26. \end{cases}$$

Коэффициент при x во втором уравнении втрое больше, чем в первом. Умножим поэтому обе части первого уравнения на 3. Получим равносильную систему (§ 80, п. 1):

$$\begin{cases} 6x - 21y = 6; \\ 6x - 11y = 26. \end{cases}$$

Коэффициенты при x стали одинаковыми. Возьмём разность этих уравнений:

$$-10y = -20.$$

Отсюда:

$$y = 2.$$

Подставив 2 вместо y в одно из данных уравнений, найдём $x = 8$.

Решение системы: $x = 8$; $y = 2$.

4. Решим ещё систему:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 21; \\ 4x - 3y = -5. \end{cases}$$

Уравняем по абсолютной величине коэффициенты при одном из неизвестных, например при y. Для этого достаточно умножить первое из уравнений на 3, а второе на 5. Получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 18x + 15y = 63; \\ 20x - 15y = -25. \end{cases}$$

Дальнейшее решение ясно.

Мы могли бы уравнять коэффициенты не при y, а при x. Для этого достаточно было умножить первое уравнение на 2, а второе на 3. (Вспомним, что наименьшее кратное число 6 и 4 равно 12.)

Из приведённых примеров видно, что решение системы уравнений способом алгебраического сложения заключается в следующем:

1. Уравниваем абсолютные величины коэффициентов при одном из неизвестных.

2. Производим сложение полученных уравнений, если равные по абсолютной величине коэффициенты имеют противоположные знаки. Если же они имеют одинаковые знаки, то производим вычитание.

3. Решаем полученное уравнение с одним неизвестным.

4. Подставляем найденное значение неизвестного в одно из данных уравнений и, решив полученное уравнение, находим значение второго неизвестного.

2. Способ подстановки.

Возьмём систему:

$$\begin{cases} 5x-3y=17; & (1) \\ 2x+3y=11. & (2) \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения одно из неизвестных, например x, через другое; получим:

$$x=\frac{11-3y}{2}. \qquad (3)$$

Подставим это выражение для x в первое уравнение:

$$5\cdot\frac{11-3y}{2}-3y=17. \qquad (4)$$

Система уравнений (3) и (4) равносильна системе уравнений (1) и (2) (§ 80, п. 3).

Но уравнение (4) содержит только одно неизвестное y.

Решив его, найдём: $y=1$.

Подставив $y=1$ в уравнение (3), найдём:

$$x=\frac{11-3\cdot1}{2}; \quad x=4.$$

Решение системы: $x=4$, $y=1$.

Из этого примера видим, что решение системы уравнений способом подстановки заключается в следующем.

1. Из одного из данных уравнений выражаем одно неизвестное через другое.
2. Подставляем полученное выражение в другое данное уравнение.
3. Решаем полученное уравнение с одним неизвестным.
4. Подставляем найденное значение неизвестного в полученное выражение для другого неизвестного и решаем уравнение.

Способ подстановки удобно применять тогда, когда один из коэффициентов при неизвестном равен единице.

3. Графический способ.

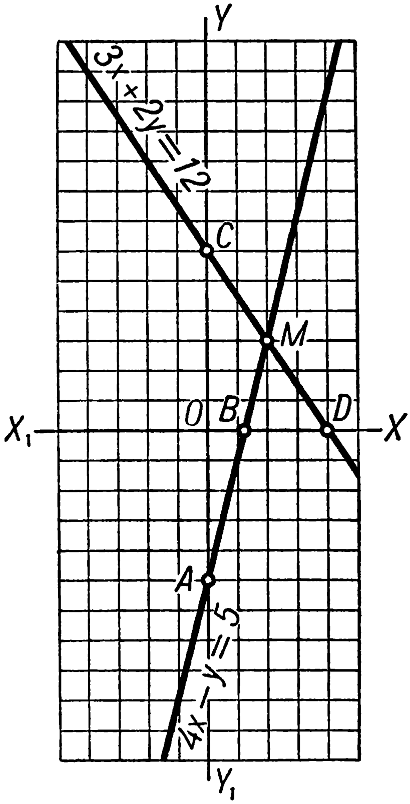
Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} 4x-y=5; \\ 3x+2y=12. \end{cases}$$

Построим график каждого из этих уравнений. Графиком первого уравнения будет прямая AB (черт. 31), проходящая через точки $A(0;\ -5)$ и $B\left(\frac{5}{4};\ 0\right)$; графиком второго — прямая CD, проходящая через точки $C(0;\ 6)$ и $D(4;\ 0)$.

Координаты точек прямой AB дают все решения первого уравнения, а координаты точек прямой CD дают все решения второго уравнения. Значит, если эти уравнения имеют общее решение, то соответствующая этому решению точка должна лежать и на прямой AB и на прямой CD, то есть прямые AB и CD должны иметь общую точку. Из чертежа видим, что такой общей точкой является точка M, координаты которой $x=2$; $y=3$ и являются решением системы. Действительно, подстановка значений $x=2$; $y=3$ в уравнения системы даёт верные равенства:

$$4\cdot 2-3=5;$$
$$3\cdot 2+2\cdot 3=12.$$



Черт. 31.

Итак, графический способ решения заключается в следующем.

1. Строим график каждого из данных уравнений.

2. Определяем координаты точки пересечения построенных прямых (если они пересекаются).

Эти координаты и будут решением системы.

4. Число решений системы. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными позволяет легко установить число решений системы.

Две прямые могут пересекаться, могут совпадать и могут быть параллельными.

Рассмотрим все эти три случая.

1. ***Прямые пересекаются.*** В этом случае они имеют одну общую точку. (Как известно, более одной общей точки две прямые иметь не могут.) Координаты этой общей точки и дают ***единственное решение*** системы. Примером является только что рассмотренная система:

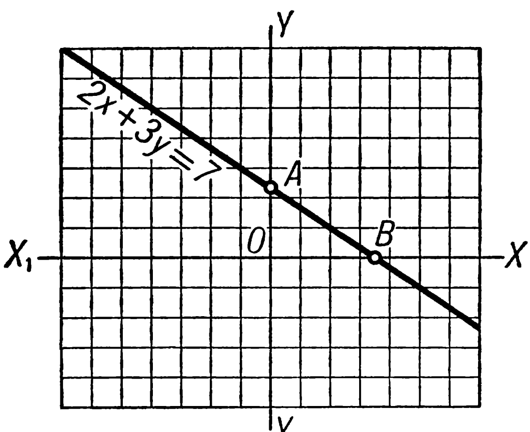
$$\begin{cases} 4x-y=5; \\ 3x+2y=12. \end{cases}$$

2. *Прямые совпадают.* В этом случае координаты каждой точки общего графика данных уравнений дают решение системы и, следовательно, система имеет ***бесчисленное множество решений.***

Пример.

$$\begin{cases} 2x+3y=7; \\ 4x+6y=14. \end{cases}$$

Графиком обоих уравнений является одна и та же прямая, проходящая через точки $A\left(0;\ 2\frac{1}{3}\right)$ и $B\left(3\frac{1}{2};\ 0\right)$ (черт. 32). Координаты любой точки этой прямой являются решением системы.



Черт. 32.

Это и понятно. Если разделить обе части второго уравнения на 2, то получим равносильное ему уравнение:

$$2x+3y=7.$$

Но это будет как раз первое из данных уравнений. Значит, фактически мы имеем здесь одно уравнение с двумя неизвестными. А такое уравнение, как мы знаем (§ 73), имеет бесчисленное множество решений.

3. *Прямые параллельны.* В этом случае прямые не имеют ни одной общей точки. Значит, и система уравнений, графиками которых являются эти прямые, ***не имеет решений.***

Пример.

$$\begin{cases} x-2y=6; \\ 2x-4y=-8. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения будет прямая AB (черт. 33), проходящая через точки $A(0;\ -3)$ и $B(6;\ 0)$.

Графиком второго уравнения будет прямая CD, проходящая через точки $D(0;\ 2)$ и $C(-4;\ 0)$.

Как видим, эти прямые параллельны. Система не имеет решений.

В этом можно убедиться и следующим образом.

Разделим обе части второго уравнения на 2. Получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x - 2y = 6; \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

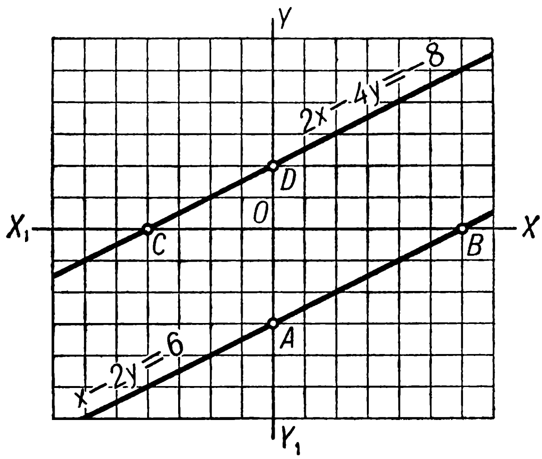
Любая пара значений x и y, удовлетворяющая первому уравнению, должна дать для выражения $x - 2y$ значение 6 и не может, следовательно, равняться -4, как того требует второе уравнение.

Итак, мы показали:

1. ***Если прямые — графики данных уравнений пересекаются, то система имеет единственное решение.***

2. ***Если прямые совпадают, то система имеет бесчисленное множество решений.***

3. ***Если прямые параллельны, то система не имеет решений.***



Черт. 33.

Заметим, что будут верны и обратные положения.

1. Если система имеет единственное решение, то прямые (графики данных уравнений) пересекаются.

2. Если система имеет бесчисленное множество решений, то прямые совпадают.

3. Если система не имеет решений, то прямые параллельны.

Все эти три положения легко доказываются методом от противного.

§ 82. Решение задач.

Решение очень многих задач может быть приведено к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными.

В частности, все задачи, в которых требуется узнать два неизвестных числа и которые мы до сих пор решали с помощью уравнения с одним неизвестным, могут быть решены и с помощью системы уравнений. Приведём пример.

Задача 1. *Для детского сада купили на 244 руб. 16 больших и малых мячей. Большой мяч стоит 25 руб., малый 12 руб. Сколько было куплено тех и других мячей в отдельности?*

Эта задача была уже решена (§ 66) с помощью уравнения с одним неизвестным. Решим её теперь с помощью системы уравнений.

В задаче требуется определить два неизвестных числа: число купленных малых и больших мячей. Введём следующие обозначения:

1) число малых мячей x штук;

2) число больших мячей y штук;

3) по условию:

$$x+y=16. \qquad (1)$$

Одно уравнение составлено. Для составления второго уравнения используем остальные данные задачи:

4) стоимость всех малых мячей $12x$ рублей;

5) стоимость всех больших мячей $25y$ рублей;

6) по условию:

$$12x+25y=244. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) составляют систему. Решим её.

Умножив первое уравнение на 12 и вычтя из второго, получим:

$$13y=52; \quad y=4.$$

Подставив найденное значение y в первое уравнение, найдём:

$$x=12.$$

Итак, малых мячей было куплено 12, а больших 4.

Задача 2. *В двух корзинах было 148 яблок, причём во второй было в 3 раза больше яблок, чем в первой. Сколько яблок было в каждой корзине?*

И в этой задаче требуется найти два неизвестных числа. Решим её с помощью системы уравнений. Введём обозначения:

1) число яблок в первой корзине x штук.

2) число яблок во второй корзине y штук.

3) по условию:

$$x+y=148. \qquad (1)$$

4) Во второй корзине было яблок в 3 раза больше, чем в первой. Следовательно,

$$y=3x. \qquad (2)$$

Получили систему уравнений. Решить её удобнее способом подстановки, так как в уравнении (2) одно из неизвестных уже выражено через другое. Делая подстановку из (2) в (1), получим:

$$x+3x=148, \text{ или } x=37.$$

Подставив это значение в уравнение (2), найдём:

$$y = 111.$$

Итак, в первой корзине было 37, во второй — 111 яблок.

§ 83. Уравнения с тремя неизвестными.

1. Одно уравнение с тремя неизвестными.

Задача 1. *Для подарков детский сад закупил конфеты трёх сортов: по* 15, *по* 10 *и по* 8 *руб. за килограмм, всего на* 164 *руб. Сколько килограммов каждого сорта конфет было куплено?*

Обозначим число килограммов конфет первого сорта через x, второго через y и третьего через z. Тогда за первый сорт было заплачено $15x$ рублей, за второй $10y$ рублей и за третий $8z$ рублей.

По условию:

$$15x + 10y + 8z = 164. \qquad (1)$$

Получили уравнение с тремя неизвестными.

Можно показать, что уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений. Действительно, взяв для x и y какие-либо произвольные числа, например $x = 2$, $y = 5$, и подставив эти значения в уравнение, получим:

$$15 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 8z = 164,$$

или

$$80 + 8z = 164.$$

Откуда найдём $z = 10\frac{1}{2}$.

Дав другие произвольные значения x и y, получим другое значение для z и т. д. (конечно, допустимыми значениями для x, y и z здесь являются только положительные числа).

Итак, одно уравнение с тремя неизвестными может иметь бесчисленное множество решений.

2. Система двух уравнений с тремя неизвестными.

Задача 2. *Для подарков детский сад закупил* 16 *кг конфет трёх сортов: по* 15, *по* 10 *и по* 8 *руб. за килограмм, всего на* 164 *руб. Сколько килограммов каждого сорта было куплено?*

Оставив те же обозначения, что и в первой задаче, получим то же уравнение, что и раньше:

$$15x + 10y + 8z = 164. \qquad (1)$$

Но, кроме того, из условия задачи следует, что

$$x + y + z = 16. \qquad (2)$$

Итак, имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными. Покажем, что и эта система имеет бесчисленное множество решений. Убедимся подстановкой, что системе удовлетворяют, например, следующие тройки чисел:

1) $x=2,\ y=11,\ z=3$; 2) $x=4,\ y=4,\ z=8$.

Дадим теперь одному из неизвестных, хотя бы x, какое-либо произвольное значение, например $x=2\frac{1}{2}$. Подставив это значение в уравнения (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} 37\frac{1}{2}+10y+8z=164; \\ 2\frac{1}{2}+y+z=16, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 5y+4z=63\frac{1}{4}; \\ y+z=13\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём $y=9\frac{1}{4}$, $z=4\frac{1}{4}$.

Итак, система имеет ещё решение: $x=2\frac{1}{2}$, $y=9\frac{1}{4}$, $z=4\frac{1}{4}$.

Взяв для x другое значение, получим новую систему с двумя неизвестными, из которой найдём y и z и т. д.

Значит, вообще говоря, система двух уравнений с тремя неизвестными тоже имеет бесчисленное множество решений.

Однако можно привести пример системы, не имеющей ни одного решения, например:

$$\begin{cases} x-y+2z=5; \\ x-y+2z=7. \end{cases}$$

Какие бы значения ни имели x, y и z, выражение $x-y+2z$ не может одновременно быть равно 5 и 7.

Могут быть системы двух уравнений с тремя неизвестными, имеющие одно решение или несколько решений, но такие случаи встречаются сравнительно редко.

§ 84. Система трёх уравнений с тремя неизвестными.

Задача 3. *Для подарков детский сад закупил* 16 *кг конфет трёх сортов: по* 15, *по* 10 *и по* 8 *руб. за килограмм, всего на* 164 *руб. Сколько килограммов каждого сорта было куплено,* *если конфет третьего сорта было куплено вдвое больше, чем второго?*

Оставив те же обозначения, что и раньше, получим по-прежнему уравнения:

$$15x + 10y + 8z = 164; \qquad (1)$$
$$x + y + z = 16. \qquad (2)$$

Но по условию задачи мы можем составить ещё и третье уравнение, а именно:

$$z = 2y \qquad (3)$$

(третьего сорта было куплено вдвое больше, чем второго).

Получили систему трёх уравнений с тремя неизвестными.

Прежде всего заметим, что все три теоремы, о которых говорилось в § 80, остаются справедливыми и для систем уравнений с тремя (и более) неизвестными. Поэтому для решения данной системы применим те же способы, что и для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

1. Способ алгебраического сложения.

Так как уравнение (3) уже не содержит x, то исключим x из системы уравнений (1) и (2). Для этого умножим обе части уравнения (2) на 15. Получим систему:

$$\begin{cases} 15x + 15y + 15z = 240; \\ 15x + 10y + 8z = 164. \end{cases}$$

Коэффициенты при x равны. Вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$5y + 7z = 76.$$

Получили уравнение с двумя неизвестными y и z. Вместе с уравнением (3) оно образует систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5y + 7z = 76; \\ z = 2y. \end{cases}$$

Решив её одним из способов, изложенных в § 81, найдём:

$$y = 4; \quad z = 8.$$

Подставив эти значения в (1) или (2) уравнения, найдём $x = 4$.

Итак, наша система трёх уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение:

$$x = 4; \quad y = 4; \quad z = 8.$$

2. Способ подстановки.

Для данной системы этот способ более удобен, так как в уравнении (3) неизвестное z уже выражено через y. Сделав подстановку в уравнения (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} 15x + 10y + 16y = 164; \\ x + y + 2y = 16, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 15x + 26y = 164; & (4) \\ x + 3y = 16. & (5) \end{cases}$$

Решим эту систему любым способом, изложенным в § 81, например способом алгебраического сложения.

Умножив уравнение (5) на 15 и вычтя из него (4), получим:

$$19y = 76.$$

Отсюда находим: $y = 4$.

Подставив найденное значение y в уравнение (5), найдём $x = 4$. Наконец, подставив значение y в (3), найдём $z = 8$. Получили то же решение, что и первым способом.

Решим ещё систему способом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 7; \\ x + 4y - z = 6; \\ 3x - 2y + 2z = 14. \end{cases}$$

Исключим одно из неизвестных, например z. Для этого сложим первое и второе уравнения; получим:

$$3x + y = 13.$$

Умножим теперь второе уравнение на 2 и сложим с третьим; получим:

$$5x + 6y = 26.$$

Оба полученных уравнения образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x + y = 13; \\ 5x + 6y = 26. \end{cases}$$

Решив её одним из известных нам способов, найдём $x = 4$, $y = 1$. Подставив эти значения в одно из данных уравнений, например в первое, найдём $z = 2$. Итак, если данная система имеет решение, то оно может быть только такое: $x = 4$; $y = 1$; $z = 2$. Подставив эти значения во второе и третье уравнения, убеждаемся, что они действительно дают решение данной системы.

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

a A	*a A*	(а)	n N	*n N*	(эн)
b B	*b B*	(бэ)	o O	*o O*	(о)
c C	*c C*	(цэ)	p P	*p P*	(пэ)
d D	*d D*	(дэ)	q Q	*q Q*	(ку)
e E	*e E*	(э)	r R	*r R*	(эр)
f F	*f F*	(эф)	s S	*s S*	(эс)
g G	*g G*	(жэ)	t T	*t T*	(тэ)
h H	*h H*	(аш)	u U	*u U*	(у)
i I	*i I*	(и)	v V	*v V*	(вэ)
j J	*j J*	(жи)	w W	*w W*	(дубль-вэ)
k K	*k K*	(ка)	x X	*x X*	(икс)
l L	*l L*	(эль)	y Y	*y Y*	(игрек)
m M	*m M*	(эм)	z Z	*z Z*	(зэт)

[1] Примечание. Для букв *g*, *h*, *j*, *y* даны французские названия, которые общеприняты в школьной практике, и добавлена буква *w*, употребляемая в математике.

ОГЛАВЛЕНИЕ